



Agenzia Nazionale per le Nuove Tecnologie,  
l'Energia e lo Sviluppo Economico Sostenibile



*Ministero dello Sviluppo Economico*

RICERCA DI SISTEMA ELETTRICO

Mesh Refinement per il codice HeaRT

*G. Rossi, N.M. Arcidiacono, F.R. Picchia, B. Favini*

Report RdS/2011/210

## MESH REFINEMENT PER IL CODICE HEART

G. Rossi<sup>1</sup>, N.M. Arcidiacono<sup>2</sup>, F.R. Picchia<sup>2</sup>, B. Favini<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Università "La Sapienza" di Roma, Dipartimento di Ingegneria Meccanica ed Aerospaziale*

<sup>2</sup> *ENEA, Casaccia, UTTEI-COMSO*

Settembre 2011

Report Ricerca di Sistema Elettrico

Accordo di Programma Ministero dello Sviluppo Economico – ENEA

Area: Produzione di energia elettrica e protezione dell'ambiente

Progetto: 2.2 – Studi sull'utilizzo pulito dei combustibili fossili, cattura e sequestro della CO<sub>2</sub>

Responsabile Progetto: Antonio Calabrò, ENEA



Pag. di  
Copia di

Unità UTTEI - COMSO	Classificazione UTTEI-COMSO <b>COMSO/2011/008EL /</b>	Distribuzione: Esterna/libera
------------------------	--	----------------------------------

<b>Progetto</b> CERSE- Ricerca di Sistema Elettrico AdP Ministero dello Sviluppo Economico – ENEA Area: Produzione e fonti energetiche <b>Tema: 5.2.2.2 Tecnologie innovative per migliorare i rendimenti di conversione delle centrali a polverino di carbone</b>	<b>Parole chiave</b> - Turbine a gas - Simulazione numerica - Mesh Refinement
<b>Attività</b> Aumento dell'efficienza delle tecnologie di cattura della CO2 con produzione di elettricità "zero emission"	

<b>Titolo</b> Mesh Refinement per il codice HearT
<b>Autori</b> G.Rossi, N.M. Arcidiacono, F.R.Picchia, B. Favini
<b>Sommario</b> Il documento descrive gli aspetti teorici alla base di una tecnica di Mesh Refinement per il trattamento di domini di simulazione con zone a diversa risoluzione spaziale e la sua implementazione nel codice CFD HearT. L'utilizzo di tale tecnica permette di rendere fattibile in tempi ragionevoli la simulazione, con approccio LES, di processi di combustione in domini delle dimensioni tipiche dei combustori di taglia industriale, riducendo la potenza di calcolo computazionale altrimenti richiesta.

4		G.Rossi				S.Giammartini	
3		F.R.Picchia					
2		N.M.Arcidiacono					
1		B. Favini					
0							
Rev	Descrizione	Redazione	Data	Convalida	Data	Approvazione	Data

# Mesh Refinement per il Codice HeaRT

G. Rossi

Corso di Dottorato in Tecnologia Aeronautica e Spaziale, XXVI ciclo  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale (DIMA)  
Università di Roma “Sapienza”, via Eudossiana 18, 00184, Roma.

N.M. Arcidiacono e F.R. Picchia

UTTEI-COMSO  
Centro Ricerche ENEA Casaccia.

B. Favini

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale (DIMA).  
Università di Roma “Sapienza”, via Eudossiana 18, 00184, Roma.

## 1 Introduzione

I fenomeni fluidodinamici di interesse ingegneristico sono in genere caratterizzati da elevata turbolenza, che comporta variazioni rapide e casuali delle grandezze di interesse nonché un rilevante divario dimensionale tra le più grandi e le più piccole strutture coerenti (vortici) che si riescono ad individuare nel flusso. L'elevata complessità del fenomeno ha comportato la nascita di diverse filosofie di simulazione numerica in campo fluidodinamico, che rispondono a differenti esigenze di precisione e rapidità di calcolo.

La simulazione diretta (DNS — Direct Numerical Simulation) prevede la risoluzione numerica delle equazioni differenziali di conservazione che caratterizzano il moto dei fluidi, senza introdurre alcun modello di turbolenza. Questo approccio risulta considerevolmente oneroso dal punto di vista computazionale, in quanto richiede l'analisi del flusso non solo nello spazio ma anche nel tempo (simulazioni non stazionarie) e necessita di una griglia di calcolo molto fine per poter risolvere le più piccole strutture turbolente. A queste limitazioni di tipo pratico la DNS contrappone la precisione dei risultati ottenibili, pur di adottare condizioni al contorno sufficientemente realistiche.

Un diverso approccio alla simulazione di flussi turbolenti consiste nel mediare nel tempo le equazioni del moto dei fluidi, ottenendo in questo modo un set di equazioni differenziali in cui le incognite siano le grandezze originarie mediate nel tempo; il sistema di equazioni che si ottiene non è tuttavia chiuso, ossia contiene dei termini non esplicitabili in funzione delle variabili dipendenti (tipicamente velocità, pressione, temperatura, concentrazione di specie chimiche, etc.) o delle variabili indipendenti (coordinate di posizione e tempo). Per chiudere il sistema di equazioni è necessario esplicitare i termini di cui sopra tramite opportuni modelli di turbolenza.

Il vantaggio fondamentale di questo approccio (tipico dei metodi RANS — Reynolds Averaged Navier Stokes) rispetto alle simulazioni DNS consiste nella

economicità di calcolo, garantita dalla stazionarietà della simulazione e dalla necessità di risolvere solo le grandi strutture turbolente, che comporta l'adozione di griglie di calcolo grossolane. Il prezzo da pagare per poter conseguire questa rapidità di calcolo consiste nell'empirismo che caratterizza tutti i modelli di turbolenza usati nelle simulazioni RANS e nella forte dipendenza della turbolenza su larga scala dalla geometria del problema in esame, impedendo a priori la generazione di un modello RANS universale che fornisca previsioni accettabili per ogni geometria e condizioni di flusso.

L'ultimo approccio cui si accenna è la cosiddetta simulazione ai larghi vortici (LES — Large Eddy Simulation), che limita la modellizzazione dei fenomeni turbolenti all'effetto delle piccole strutture turbolente sulle strutture a più larga scala. La metodologia LES, pur essendo anch'essa basata sull'adozione di modelli di turbolenza, dovrebbe consentire di ottenere risultati più affidabili e modelli di più vasta applicabilità rispetto ai tradizionali modelli RANS, in virtù dell'isotropia e dell'indipendenza dalla geometria del problema che caratterizza notoriamente le più piccole scale della turbolenza. Inoltre la maggior parte del trasporto convettivo di una generica grandezza (quantità di moto, energia cinetica, etc.) avviene ad opera delle strutture su larga scala: ne segue che il peso del modello LES e delle approssimazioni da esso introdotte nella simulazione non dovrebbero essere rilevanti come per i modelli RANS, che hanno la pretesa di riprodurre completamente l'effetto della turbolenza, sia su grande che su piccola scala.

Una limitazione della metodologia LES consiste nella forte richiesta di risorse di calcolo, in quanto la turbolenza su larga scala non può essere trattata come un fenomeno stazionario e la risoluzione dei grandi vortici, che non vengono modellati, richiede l'adozione di griglie di calcolo intermedie tra quelle richieste da approcci DNS e RANS.

## 2 Simulazioni LES per Bruciatori

Lo studio di bruciatori per la produzione di energia non può prescindere dal considerare un campo di moto turbolento: alcuni fenomeni propri di questi impianti, sono notevolmente influenzati dalla turbolenza del getto e dall'interazione tra le strutture turbolente con le pareti del bruciatore, gli iniettori o il fronte di fiamma.

In particolare, per ottenere una fiamma stabile (che rimanga cioè ancorata nella posizione definita in fase di progetto senza venire soffiata via al variare delle condizioni operative) sono generalmente utilizzati alcuni accorgimenti, come l'uso di "bluff bodies" (corpi tozzi) che generano vortici, la presenza di un condotto divergente e l'uso di "swirlers", che impongono alle correnti di combustibile e ossidante (o della miscela) una componente tangenziale di velocità. In tutti e tre i casi è evidente come la turbolenza del getto rivesta un ruolo fondamentale nel funzionamento dei bruciatori.

Considerate le alte velocità del flusso premiscelato di combustibile e ossidante (o dei singoli componenti in caso di getto non premiscelato) all'entrata della camera di combustione, e considerata anche la dimensione, generalmente piuttosto ridotta, degli iniettori, una simulazione con approccio DNS è impensabile per questa tipologia di impianti; un approccio di tipo RANS è di difficile attuazione, a causa della difficoltà di ottenere un modello di turbolenza suffi-

cientemente valido per il problema in esame (flusso in non equilibrio termico e chimico, con geometrie complesse) e del numero di simulazioni necessarie per ottenere dei risultati affidabili.

L'approccio più promettente è senza dubbio di tipo LES, in quanto permette di ottenere risultati migliori di un approccio RANS e in tempi sicuramente minori di un approccio DNS; di contro, le risorse di calcolo richieste sono comunque notevoli: la griglia non può avere celle di dimensioni troppo grandi (per permettere la risoluzione delle scale turbolente significative) e perciò i punti di calcolo sono necessariamente molto numerosi.

### 3 Il Bruciatore con Tecnologia ISOTHERM

La tecnologia ISOTHERM, sviluppata da ITEA in collaborazione con ENEA, prevede una ossicombustione in assenza di fiamma (FLOX®) di una miscela composta da ossigeno e "slurry" (fanghiglia) di carbone: in questo modo la combustione avviene in maniera uniforme, controllata e a senza picchi di temperatura, data la mancanza di un fronte di fiamma e la presenza di goccioline di acqua e vapore acqueo. I gas prodotti dalla combustione, inoltre, vengono reimmessi all'interno del bruciatore (diluendo e preriscaldando l'ossigeno) per abbattere drasticamente la presenza di  $\text{NO}_x$  e produrre ceneri pesanti e leggere completamente inerti.

L'impianto pilota per lo studio di questa tecnologia prevede un bruciatore cilindrico lungo oltre 5m e di oltre 1m di diametro; una simulazione numerica di tipo LES su un combustore di queste dimensioni presenta notevoli problematiche, poiché la risoluzione necessaria per risolvere con esattezza il campo fluidodinamico è piuttosto elevata, date le ridotte dimensioni degli iniettori di ossigeno (alcuni millimetri). Basando la dimensione caratteristica della griglia sulle piccole scale presenti all'interno del campo di moto, la griglia di calcolo avrebbe un numero di punti troppo elevato per permettere dei tempi di simulazione ragionevoli; al contrario, l'utilizzo di una griglia di calcolo che permetta una simulazione numerica dell'intero bruciatore in tempi accettabili, non consente l'osservazione di fenomeni di notevole importanza per il funzionamento dell'impianto, come ad esempio i vortici in prossimità degli iniettori e l'interazione tra slurry di carbone e ossigeno gassoso.

La presenza di un flusso multifase, inoltre, è un parametro vincolante nella scelta della risoluzione della griglia di calcolo: la dimensione della cella, infatti, non può essere minore della dimensione della particella solida o della gocciolina trasportate dal fluido.

Appare perciò evidente che una simulazione mediante metodologia LES su questo tipo di combustore consente di ottenere risultati soddisfacenti solo se utilizzata congiuntamente ad una tecnica di mesh refinement; la griglia di calcolo non è semplicemente deformata (stretching), ma sono presenti griglie di calcolo a risoluzioni differenti a seconda della zona considerata: in prossimità degli iniettori, dove si concentrano i fenomeni turbolenti su piccola scala e dove è forte l'interazione fra i getti, è presente una griglia (o più griglie) fitta sovrapposta alla griglia rada, mentre nella parte terminale dell'impianto, dove la velocità del flusso e la turbolenza sono basse, è presente una sola griglia rada.

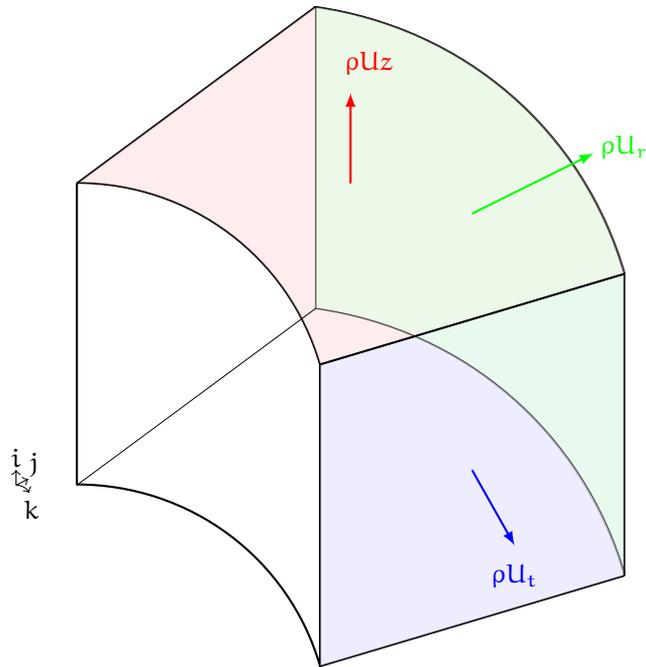


Figura 1: Posizione delle componenti del vettore velocità in una cella della griglia di calcolo

## 4 Il Codice HeaRT

Il codice HeaRT (Heat Release and Turbulence), sviluppato da ENEA in collaborazione con il Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma, è in grado di simulare flussi turbolenti reattivi e non reattivi a bassi numeri di Mach in geometrie 3D cilindriche e cartesiane multi-blocco ed utilizzando griglie strutturate. Lo schema è al secondo ordine centrato nello spazio e al terzo ordine nel tempo (schema Shu-Osher, della famiglia dei Runge-Kutta), a variabili sfalsate: gli scalari (densità, temperatura, pressione, energia totale, energia cinetica turbolenta e frazioni di massa) sono collocati al centro della cella di calcolo, le tre componenti del vettore velocità (moltiplicate per la densità) sono collocate sulle facce "positive" della cella (figura 4).

Questa tecnica di discretizzazione permette una maggiore precisione e una discretizzazione più robusta dell'equazione di conservazione della massa, che non necessita di interpolazioni.

Nel codice è inoltre presente un solutore per la fase dispersa, basato sul metodo di Godunov con ricostruzione di tipo ENO (Essentially Non Oscillatory), che permette quindi lo studio del moto delle particelle di carbone e delle goccioline di acqua che interagiscono con il flusso di ossigeno e con il vapore acqueo.

## 5 Tecniche di Mesh Refinement

Le tecniche di mesh refinement sono numerose e piuttosto diffuse nell'ambito di simulazioni numeriche complesse, in quanto permettono una migliore approssimazione della soluzione e in alcuni casi una riduzione dei tempi di calcolo. Nell'ambito dello studio di una tecnica di mesh refinement per il codice HeaRT sono stati analizzati diversi articoli riguardanti l'uso di metodi per il miglioramento della soluzione ottenuta tramite simulazioni di tipo LES: la ricerca è risultata piuttosto difficoltosa, in quanto il numero di articoli riguardanti una tecnica multilivello per flussi turbolenti, reagenti e compressibili è esiguo; inoltre l'argomento è spesso trattato in maniera non esaustiva, perché la soluzione adottata non è molto convincente, o perché gli autori tendono a non rivelare le loro conclusioni circa il metodo adottato.

Gli articoli considerati riguardano:

- metodi *multigrid* (che hanno alcune similitudini con il metodo multilivello);
- simulazioni LES con tecniche multilivello per flussi *non reagenti*;
- mesh refinement di tipo *adattivo* in assenza di turbolenza;
- mesh refinement di tipo adattivo per flussi *reagenti*.

L'idea di base di una tecnica multilivello è lavorare non su una singola griglia, ma con griglie differenti di risoluzione via via maggiore, che interagiscono tra loro.

La tecnica multigrid si applica alla soluzione di equazioni e sistemi di equazioni ellittici o iperbolici e consente un notevole aumento della velocità di convergenza della simulazione; consiste in una serie di procedimenti iterativi atti a ridurre i *residui* derivanti dalla soluzione approssimata delle equazioni ([1]): questo metodo non è applicabile al codice HeaRT, nel quale lo schema numerico adottato è di tipo esplicito.

Nel caso di flussi non reagenti, le tecniche multilivello ben si adattano ad approcci di tipo LES ([2], [3]): in questo caso, le varie griglie non avanzano dello stesso istante temporale, ma la soluzione a livello  $l + 1$  è "congelata" (quasi-static approximation) durante l'integrazione della griglia di livello  $l$ ; le equazioni perciò vengono risolte per la maggior parte del tempo sulla griglia più lasca e il campo di moto risultante è interpolato sulle griglie più fitte, dove si arricchisce delle frequenze risolte a quel determinato livello di griglia.

Le griglie non uniformi non permettono di ottenere soluzioni migliori dal punto di vista della turbolenza: l'unico risultato ottenibile è una migliore rappresentazione del profilo medio della velocità; per migliorare la qualità della soluzione è necessario l'uso di griglie sovrapposte con crescente livello di raffinamento ([4]). L'interazione tra le griglie è ottenuta mediante l'imposizione di condizioni al contorno dalla griglia rada sulla griglia fitta: se i bordi della griglia fitta coincidono con una parete, le condizioni al contorno "standard" sono applicate sia sulla griglia rada che sulla griglia fitta, se invece i bordi della griglia fitta cadono all'interno della griglia rada, alla griglia fitta vengono imposte condizioni al contorno di Dirichelet. Queste condizioni al contorno devono essere aggiornate ad ogni time step.

Nel caso di fluidi incomprimibili, l'accoppiamento tra le griglie può essere ottenuto tramite l'equazione di Poisson per la pressione ([5], [6]): ogni griglia risolve le equazioni di conservazione della quantità di moto e "l'informazione" aggiuntiva dovuta alla maggiore risoluzione della griglia è incorporata nel termine sorgente dell'equazione di Poisson. Per il passaggio delle informazioni tra i veri livelli di griglia (che avvengono ad ogni time step) vengono utilizzati polinomi di Fourier. Nel caso di fluidi reagenti

Considerando un sistema di equazioni iperbolico, è possibile implementare un mesh refinement di tipo adattivo ([7]): mediante una procedura di valutazione dell'errore (calcolato come la differenza tra la soluzione calcolata con un time step  $2t$  e la soluzione calcolata in due time step successivi  $t$ ) si identificano le zone in cui è necessario il mesh refinement; tramite opportuni criteri che massimizzano l'efficienza dell'algoritmo si provvede all'introduzione di nuovi livelli di griglia o all'unione di altri. La comunicazione tra il livello  $l$  e il livello  $l+1$  (più fitto) avviene tramite interpolazioni bilineari dei valori della griglia di livello  $l$ , mentre la comunicazione in direzione opposta è effettuata tramite una media dei valori delle celle di livello  $l+1$ .

## 6 Mesh Refinement per il Codice HeaRT

Dall'analisi precedente appare evidente come sia necessario introdurre una tecnica di mesh refinement "ad hoc" per il codice HeaRT, considerate le caratteristiche dei fluidi simulati: siamo infatti in presenza di flussi comprimibili, multifase, reagenti e ad elevata turbolenza.

Il mesh refinement in questo caso è di tipo multilivello: su tutto il dominio di calcolo si estende la griglia rada e in zone opportune sono generati a priori livelli di griglia di risoluzione via via crescente, sempre sovrapposti; il raffinamento tra i livelli è costante ed uguale per ogni direzione, cioè:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} = \dots = \frac{\Delta x_{l-1}}{\Delta x_l} = r$$

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} = \frac{\Delta y_2}{\Delta y_3} = \dots = \frac{\Delta y_{l-1}}{\Delta y_l} = r$$

$$\frac{\Delta z_1}{\Delta z_2} = \frac{\Delta z_2}{\Delta z_3} = \dots = \frac{\Delta z_{l-1}}{\Delta z_l} = r$$

e si è imposto che in una cella coarse siano contenute  $n$  celle fine (con  $n = 2$  per un caso monodimensionale,  $n = 4$  per un caso bidimensionale e  $n = 8$  per una griglia tridimensionale). Per ottenere però una griglia di livello  $l+1$  a partire da una griglia di livello  $l$ , non è possibile dividere semplicemente in  $n$  celle la cella della griglia coarse, poiché in presenza di una griglia non uniforme (stretching) si otterrebbero sicuramente delle discontinuità nelle dimensioni delle celle della griglia fine.

Una soluzione a questo problema è quella di mappare tutti i punti della griglia di livello  $l$  in un sistema di coordinate "fittizie" nel quale la griglia appare uniforme; dalla griglia ottenuta nel nuovo sistema di coordinate si ricavano le celle della griglia fitta, dividendo per  $n$  ogni cella della griglia coarse. Successivamente, i punti della griglia fitta nel nuovo sistema di coordinate vengono riportate nel sistema di coordinate originario. In questo modo la griglia fitta presenta una regolarità nello stretching delle celle.

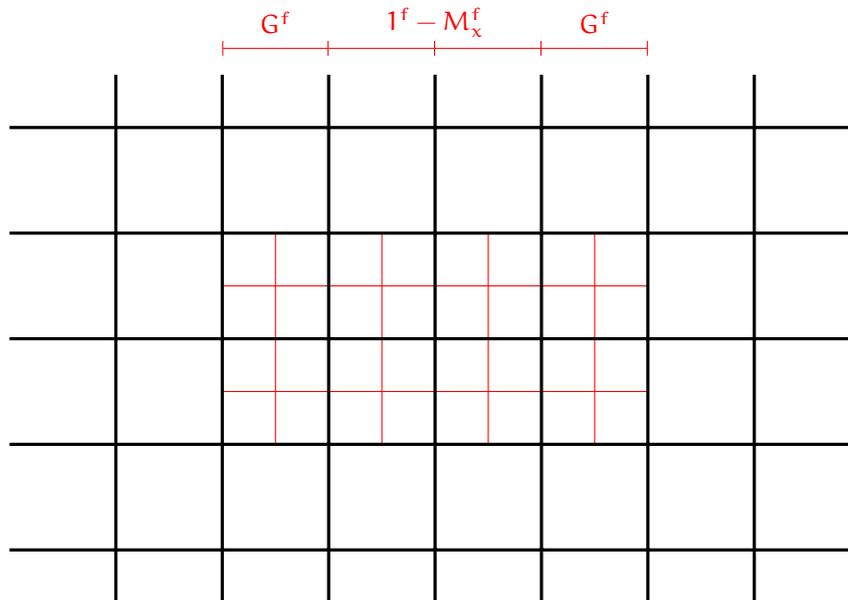


Figura 2: Posizione Reciproca delle Griglie

Si è adottata, come convenzione, una numerazione dei livelli che parte dal livello più rado (livello 1) e prosegue fino al livello più fitto.

Le griglie sono annidate, cioè i punti sul bordo della griglia al livello  $l$  devono essere contenuti all'interno della griglia di livello  $l-1$ , eccezion fatta per i punti in prossimità di una parete solida.

In un approccio di questo tipo è necessario predisporre procedure di comunicazioni tra i vari livelli, al fine di ottenere soluzioni coerenti tra le varie griglie. I vari livelli comunicano tra loro tramite due operazioni: **prolungamento** e **restrizione**. La prima è usata per il passaggio delle informazioni dalla griglia di livello  $l-1$  alla griglia di livello  $l$ , **solo per quanto riguarda le condizioni al contorno sulle celle "ghost" ( $G^n$ )**, mentre la seconda è usata per il passaggio delle informazioni dalla griglia di livello  $l$  alla griglia di livello  $l-1$ , **per tutti i punti interni**, cioè per i punti in cui la soluzione viene effettivamente integrata sulla griglia di livello  $l$ .

## 6.1 Algoritmo di Soluzione

L'algoritmo di soluzione prevede che i vari livelli integrino in maniera indipendente le equazioni di conservazione: la comunicazione, infatti, non avviene mai all'interno di un passo temporale ma sempre alla fine dell'algoritmo di Runge-Kutta. In particolare, la comunicazione tra il livello  $l$  e il successivo (o il precedente) avviene solo e soltanto quando i due livelli hanno raggiunto lo stesso istante temporale. I livelli più fitti, quindi, per rispettare le condizioni di stabilità convettiva e diffusiva, devono eseguire  $p$  passi di integrazione per raggiungere il livello che li precede ed effettuare così la comunicazione (ogni

livello calcola infatti il  $\delta t$  che rispetta le condizioni di stabilità proprie della sua griglia).

L'algoritmo è illustrato in maniera dettagliata in figura 3, nella quale per semplicità sono stati considerati solo 3 livelli.

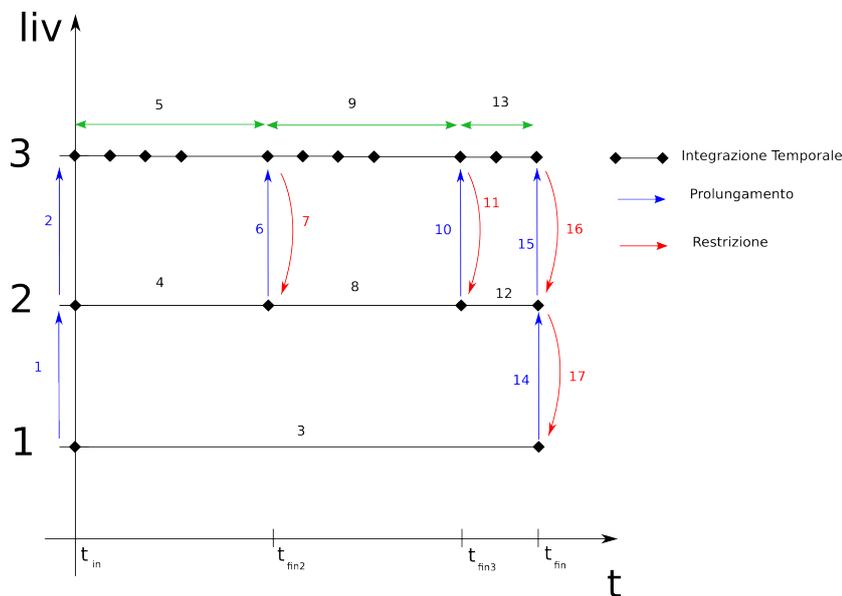


Figura 3: Schema per l'Avanzamento Temporale della Soluzione sui Vari Livelli di Griglia

La procedura è descritta in seguito:

1. **Prolungamento** delle condizioni al contorno al tempo  $t_{in}$  dal livello 1 al livello 2;
2. **Prolungamento** delle condizioni al contorno al tempo  $t_{in}$  dal livello 2 al livello 3;
3. **Integrazione** temporale della griglia di livello 1, da  $t_{in}$  a  $t_{fin}$ ;
4. **Integrazione** temporale della griglia di livello 2, da  $t_{in}$  a  $t_{fin2} \neq t_{fin}$ ;
5. **Integrazione** temporale della griglia di livello 3, da  $t_{in}$  a  $t_{fin2} \neq t_{fin}$ , mediante  $p_1$  passi di integrazione, durante i quali le condizioni al contorno della griglia fitta sono mantenute costanti all'istante  $t_{in}$ ;
6. **Prolungamento** delle condizioni al contorno al tempo  $t_{fin2}$  dal livello 2 al livello 3;
7. **Restrizione** della soluzione calcolata all'istante  $t_{fin2}$  dal livello 3 al livello 2;
8. **Integrazione** temporale della griglia di livello 2, da  $t_{fin2}$  a  $t_{fin3}$ ;

9. **Integrazione** temporale della griglia di livello 3, da  $t_{fin_2}$  a  $t_{fin_3} \neq t_{fin}$ , mediante  $p_2$  passi di integrazione, durante i quali le condizioni al contorno della griglia fitta sono mantenute costanti all'istante  $t_{fin_2}$ ;
10. **Prolungamento** delle condizioni al contorno al tempo  $t_{fin_3}$  dal livello 2 al livello 3;
11. **Restrizione** della soluzione calcolata all'istante  $t_{fin_3}$  dal livello 3 al livello 2;
12. **Integrazione** temporale della griglia di livello 2, da  $t_{fin_3}$  a  $t_{fin}$ ;
13. **Integrazione** temporale della griglia di livello 3, da  $t_{fin_3}$  a  $t_{fin}$ , mediante  $p_3$  passi di integrazione, durante i quali le condizioni al contorno della griglia fitta sono mantenute costanti all'istante  $t_{fin_3}$ ;
14. **Prolungamento** delle condizioni al contorno al tempo  $t_{fin}$  dal livello 1 al livello 2;
15. **Prolungamento** delle condizioni al contorno al tempo  $t_{fin}$  dal livello 2 al livello 3;
16. **Restrizione** della soluzione calcolata all'istante  $t_{fin}$  dal livello 3 al livello 2;
17. **Restrizione** della soluzione calcolata all'istante  $t_{fin}$  dal livello 2 al livello 1;

Il solutore presente all'interno del codice HeaRT è stato perciò trasformato in una procedura ricorsiva, nella quale il livello  $l$ , una volta integrato, richiama il solutore per il livello successivo  $l+1$  (se presente), che ripete la stessa operazione fino a quando non viene raggiunto il livello più fitto. In seguito, il livello più fitto ( $l_n$ ) raggiunge il livello che lo precede mediante  $p$  passi temporali e così via, fino a che tutti i livelli non hanno raggiunto il livello 1. A quel punto la procedura di integrazione delle equazioni di conservazione può definirsi conclusa e il livello 1 passa al time step successivo.

Nell'algoritmo appena descritto, le comunicazioni tra i vari livelli di griglia rivestono un'importanza fondamentale: mediante comunicazioni ad intervalli prestabiliti, infatti, le griglie sono vincolate e le soluzioni sui vari livelli di griglia sono tutte coerenti tra loro (ferma restando una differente rappresentazione del campo fluidodinamico dovuta alla diversa risoluzione dei livelli).

Ad esempio, nel caso di un flusso turbolento, i piccoli vortici hanno un'importanza fondamentale sul mescolamento del fluido a livello macroscopico: se la griglia fitta, che individua e risolve i vortici di piccole dimensioni, non comunicasse la soluzione ai livelli superiori, le soluzioni integrate sulle griglie più lasche (che a causa della loro risoluzione non contemplano l'esistenza di tali vortici) risulterebbero diverse, anche in maniera significativa, rispetto alla soluzione ottenuta sulla griglia fitta, proprio a causa dell'errata rappresentazione del meccanismo di mescolamento.

Considerando poi che le condizioni al contorno per la griglia fitta sono ottenute mediante prolungamento della soluzione calcolata al livello immediatamente superiore, risulta ancora più chiaro come questo continuo scambio di informazioni tra i vari livelli di griglia sia necessario per una efficace implementazione

di un metodo multi-livello: una soluzione errata sul livello più lasco, infatti, prolungherà sul livello più fitto condizioni al contorno non corrette, che lo allontaneranno dalla soluzione calcolata nel time step precedente, nel quale invece si è tenuto conto dei movimenti del fluido su scala molto ridotta.

L'algoritmo è stato scelto in base alle caratteristiche del codice HeaRT e del suo solutore: l'uso di griglie strutturate multiblocco ben si adatta alla presenza di molteplici livelli di griglia "sovrapposti"; le condizioni al contorno "bloccate" inoltre garantiscono che i vari livelli di griglia restino comunque vincolati tra loro, come la restrizione della soluzione dal livello più fitto a quello più lasco. La presenza della griglia lasca su tutto il campo permette inoltre l'introduzione di livelli di griglia più raffinati in zone dove inizialmente non erano previsti, senza dover modificare per intero il dominio di calcolo: ciò si traduce in un notevole risparmio di tempo e consente inoltre di utilizzare come input di partenza per nuove simulazioni campi fluidodinamici già sviluppati senza dover necessariamente ripartire da zero.

## 6.2 Operatori di Comunicazione tra i Livelli

Per semplicità di trattazione, gli operatori illustrati di seguito si riferiscono al caso di griglia cartesiana bidimensionale.

### 6.2.1 Restrizione

Per il passaggio della soluzione dal livello  $n$  al livello  $n - 1$  viene utilizzato l'operatore di **restrizione**. Nel caso delle grandezze scalari (collocate al centro della cella, figura 4), lo scalare della cella coarse è calcolato dagli scalari delle celle fine mediante la:

$$\Phi_{I,J} = \frac{(\phi_{i,j}A_{i,j} + \phi_{i,j+1}A_{i,j+1} + \phi_{i+1,j}A_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1}A_{i+1,j+1})}{A_{i,j} + A_{i,j+1} + A_{i+1,j} + A_{i+1,j+1}}$$

dove naturalmente  $A_{i,j} + A_{i,j+1} + A_{i+1,j} + A_{i+1,j+1} = A_{I,J}$ ; le grandezze  $A_{i,j}$ ,  $A_{i,j+1}$ ,  $A_{i+1,j}$ ,  $A_{i+1,j+1}$ , sono le aree delle celle fine contenute nella cella coarse di area  $A_{I,J}$ .

Nel caso dei flussi  $\rho\mathbf{u}$ , collocati su 2 lati della cella, la ricostruzione del vettore sulla faccia della cella coarse è operata mediante una somma dei vettori sulle facce delle celle fine, per garantire che sulla medesima interfaccia i valori tra cella coarse e celle fine coincidano:

$$\rho\mathbf{u}_{I,J} = \frac{\rho\mathbf{u}_{i+1,j}l_j + \rho\mathbf{u}_{i+1,j+1}l_{j+1}}{l_j + l_{j+1}}$$

dove naturalmente  $l_j + l_{j+1} = l_J$ .

Con l'operatore di restrizione, in pratica, la soluzione ottenuta mediante l'integrazione delle equazioni sulla griglia di livello  $l$  viene sostituita, nella zona di sovrapposizione, con la soluzione ottenuta mediante l'integrazione delle equazioni sulla griglia di livello  $l + 1$ : in questo modo è possibile tener conto anche sulla griglia lasca degli effetti che non è possibile risolvere mediante quella risoluzione, ma che sono correttamente individuati e risolti dalla griglia a risoluzione maggiore: ciò permette di migliorare notevolmente l'accuratezza della soluzione su tutto il dominio di integrazione.



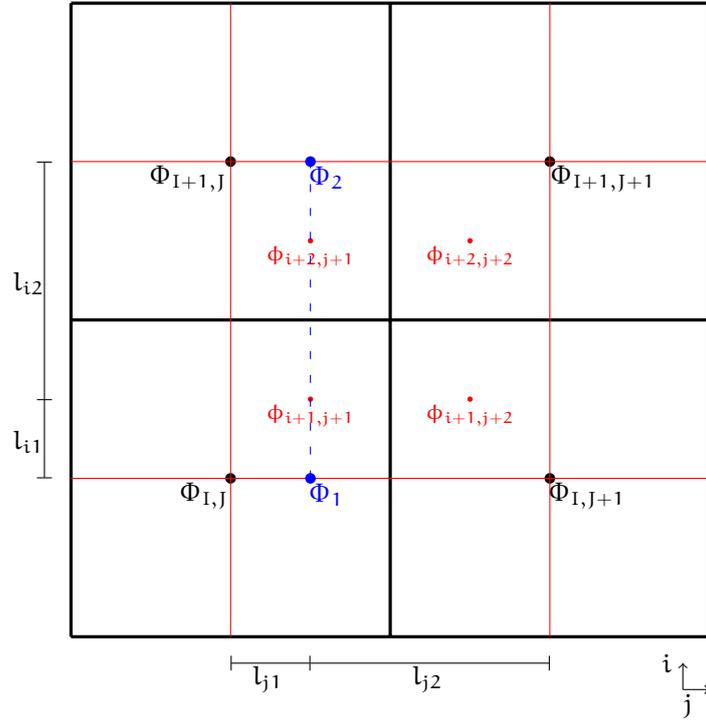


Figura 5: Prolungamento delle Grandezze Scalari

$$\phi_{i,j} = \frac{\mathcal{A}_{I,J} \Phi_{I,J}}{\phi'_{i,j} \mathcal{A}_{i,j} + \phi'_{i,j+1} \mathcal{A}_{i,j+1} + \phi'_{i+1,j} \mathcal{A}_{i+1,j} + \phi'_{i+1,j+1} \mathcal{A}_{i+1,j+1}} \phi'_{i,j}$$

e lo stesso per tutti gli altri scalari appartenenti alla stessa cella coarse:

$$\phi_{i,j+1} = \frac{\mathcal{A}_{I,J} \Phi_{I,J}}{\phi'_{i,j} \mathcal{A}_{i,j} + \phi'_{i,j+1} \mathcal{A}_{i,j+1} + \phi'_{i+1,j} \mathcal{A}_{i+1,j} + \phi'_{i+1,j+1} \mathcal{A}_{i+1,j+1}} \phi'_{i,j+1}$$

$$\phi_{i+1,j} = \frac{\mathcal{A}_{I,J} \Phi_{I,J}}{\phi'_{i,j} \mathcal{A}_{i,j} + \phi'_{i,j+1} \mathcal{A}_{i,j+1} + \phi'_{i+1,j} \mathcal{A}_{i+1,j} + \phi'_{i+1,j+1} \mathcal{A}_{i+1,j+1}} \phi'_{i+1,j}$$

$$\phi_{i+1,j+1} = \frac{\mathcal{A}_{I,J} \Phi_{I,J}}{\phi'_{i,j} \mathcal{A}_{i,j} + \phi'_{i,j+1} \mathcal{A}_{i,j+1} + \phi'_{i+1,j} \mathcal{A}_{i+1,j} + \phi'_{i+1,j+1} \mathcal{A}_{i+1,j+1}} \phi'_{i+1,j+1}$$

Per i vettori il discorso è analogo: per prima cosa si effettua un'interpolazione lineare (figura 6) tra i valori  $\rho \mathbf{u}_{I,J}$  e  $\rho \mathbf{u}_{I,J+1}$ :

$$\rho \mathbf{u}'_{i+1,j+1} = \frac{\rho \mathbf{u}_{I,J} d_{1(I,J)} + \rho \mathbf{u}_{I,J+1} d_{1(I,J+1)}}{d_{1(I,J)} + d_{1(I,J+1)}}$$

$$\rho \mathbf{u}'_{i+1,j+2} = \frac{\rho \mathbf{u}_{I,J} d_{2(I,J)} + \rho \mathbf{u}_{I,J+1} d_{2(I,J+1)}}{d_{2(I,J)} + d_{2(I,J+1)}}$$

Anche in questo caso il valore così calcolato non assicura la conservazione, ovvero:

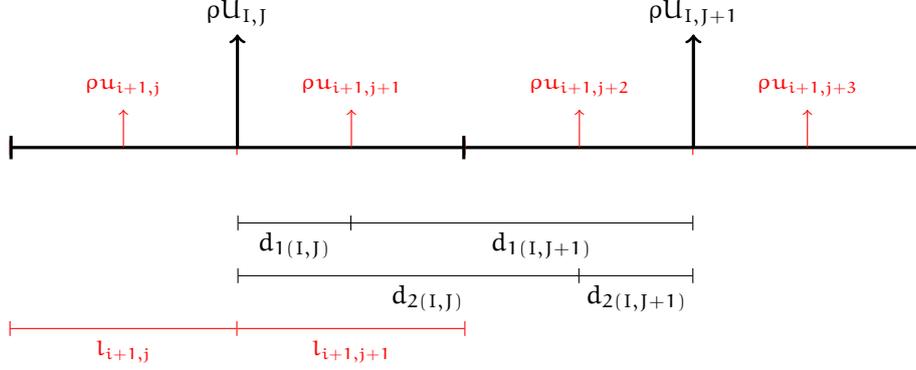


Figura 6: Prolungamento delle Grandezze Vettoriali

$$\rho u'_{i+1,j} l_{i+1,j} + \rho u'_{i+1,j+1} l_{i+1,j+1} = \rho U_{I,J} (l_{i+1,j} + l_{i+1,j+1})$$

Uso allora il valore appena calcolato per ricavare il valore conservativo  $\rho u_{i,j+1}$  mediante la:

$$\rho u_{i+1,j} = \frac{\rho U_{I,J} (l_{i+1,j} + l_{i+1,j+1})}{\rho u'_{i+1,j} l_{i+1,j} + \rho u'_{i+1,j+1} l_{i+1,j+1}} \rho u'_{i+1,j}$$

$$\rho u_{i+1,j+1} = \frac{\rho U_{I,J} (l_{i+1,j} + l_{i+1,j+1})}{\rho u'_{i+1,j} l_{i+1,j} + \rho u'_{i+1,j+1} l_{i+1,j+1}} \rho u'_{i+1,j+1}$$

## 7 Conclusioni

Nell'ambito di simulazioni numeriche con approccio LES su domini di grandi dimensioni, l'uso di un unico livello di griglia, anche non uniforme, presenta notevoli difficoltà sia dal punto di vista prettamente numerico (scarsa qualità della soluzione se si utilizza una griglia troppo lasca, tempi di simulazione non accettabili se si utilizza una griglia molto fitta), sia dal punto di vista "fisico": sarebbe necessario infatti un modello di sottogriglia estremamente complesso per tener conto in maniera corretta di tutte le scale di moto non risolte.

L'introduzione del multi-livello consente di superare entrambi i problemi, in quanto permette di raffinare solo una piccola parte del dominio, non aumentando troppo le risorse di calcolo richieste e conseguentemente i tempi di simulazione; inoltre la presenza di livelli via via più fitti ha un effetto molto positivo sulla soluzione calcolata sulla griglia lasca, che viene "influenzata" dagli effetti microscopici di cui tengono conto i livelli a risoluzione maggiore: in questa ottica risultano fondamentali le comunicazioni tra i vari livelli di griglia, che permettono di ottenere soluzioni coerenti tra i vari livelli. L'operatore di prolungamento trasporta le condizioni al contorno dal livello  $l$  al livello  $l + 1$ , l'operatore di restrizione sostituisce in maniera conservativa e nelle zone di sovrapposizione la soluzione calcolata al livello  $l$  con la soluzione calcolata al livello  $l + 1$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31(138):333–390, 1977.
- [2] M. Terracol, P. Sagaut, and C. Basdevant. A multilevel algorithm for large-eddy simulation of turbulent compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 167:439–475, 2001.
- [3] M. Terracol, P. Sagaut, and C. Basdevant. A time self-adaptive multilevel algorithm for large-eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, 184:339–365, 2003.
- [4] B. J. Boersma, M. N. Kooper, F. T. M. Nieuwstadt, and P. Wesseling. Local grid refinement in large-eddy simulations. *Journal of Engineering Mathematics*, 32:161–175, 1997.
- [5] P. P. Sullivan, J. C. McWilliams, and C. Moeng. A grid nesting method for large-eddy simulations of planetary boundary-layer flows. *Boundary Layer Meteorology*, 80:167–202, 1996.
- [6] C. A. Rendlemann, V. E. Beckner, and M. Lijewski. Parallelization of an adaptive mesh refinement method for low mach number combustion, 2001.
- [7] M. Berger and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 82:64–84, 1989.
- [8] S. M. Mitran. A comparison of adaptive mesh refinement approaches for large eddy simulation, 2001.
- [9] M. Manhart. A zonal grid algorithm for dns of turbulent boundary layers. *Computers & Fluids*, 33:435–461, 2004.
- [10] C. Safta, J. Ray, and N. N. Najm. A high-order amr algorithm for chemically reacting flows. July 2011. ICDERS 2011, Irvine, USA.
- [11] C. Shen, J. Qiu, and A. Christlieb. Adaptive mesh refinement based on high order finite difference weno scheme for multiscale simulations. *Journal of Computational Physics*, 230:3780–3802, 2011.