



Ente per le Nuove tecnologie,
l'Energia e l'Ambiente

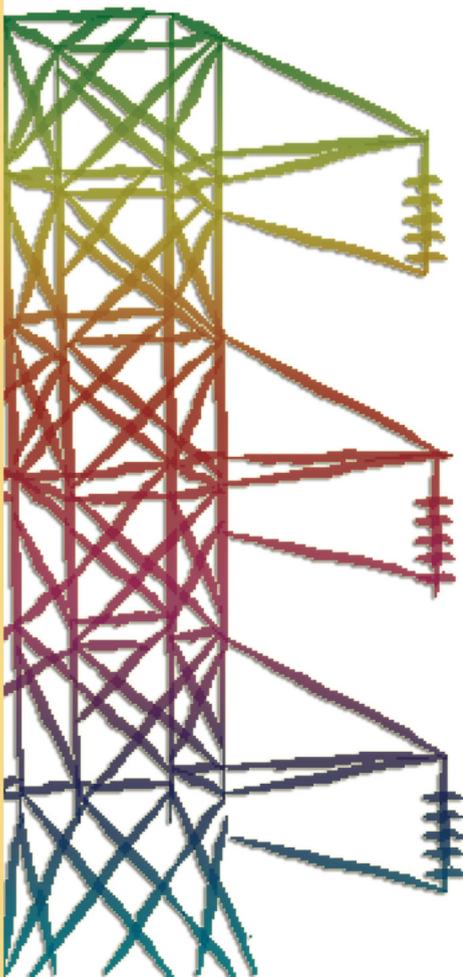


Ministero dello Sviluppo Economico

RICERCA SISTEMA ELETTRICO

Convezione naturale in fluidi a basso numero di Prandtl con generazione interna di potenza: risultati computazionali per diverse geometrie

A. Caronia, M. Casamira, F. Catiglia, P. Chiovaro, M. Ciofalo, P.A. Di Maio, I. Di Piazza, M. Giardina, C. Lombardo, E. Olivieri, S. Puleo, G. Vella





Ente per le Nuove tecnologie,
l'Energia e l'Ambiente



Ministero dello Sviluppo Economico

RICERCA SISTEMA ELETTRICO

Convezione naturale in fluidi a basso numero di Prandtl con
generazione interna di potenza: risultati computazionali per
diverse geometrie

*A. Caronia, M. Casamira, F. Catiglia, P. Chiovaro, M. Ciofalo, P.A. Di Maio, I. Di
Piazza, M. Giardina, C. Lombardo, E. Olivieri, S. Puleo, G. Vella*



CONVEZIONE NATURALE IN FLUIDI A BASSO NUMERO DI PRANDTL CON GENERAZIONE
INTERNA DI POTENZA: RISULTATI COMPUTAZIONALI PER DIVERSE GEOMETRIE

A. Caronia, M. Casamira, F. Catiglia, P. Chiovaro, M. Ciofalo, P.A. Di Maio, I. Di Piazza, M.
Giardina, C. Lombardo, E. Olivieri, S. Puleo, G. Vella (CIRTEN)

Novembre 2008

Report Ricerca Sistema Elettrico

Accordo di Programma Ministero dello Sviluppo Economico – ENEA

Area: Produzione e fonti energetiche

Tema: Nuovo Nucleare da Fissione

Responsabile Tema: Stefano Monti, ENEA



CIRTEN
CONSORZIO INTERUNIVERSITARIO
PER LA RICERCA TECNOLOGICA NUCLEARE

UNIVERSITA' DI PALERMO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA NUCLEARE

**Convezione naturale in fluidi a basso numero di Prandtl con
generazione interna di potenza: risultati computazionali per diverse
geometrie**

**A. Caronia, M Casamirra, F. Castiglia, P. Chiovaro, M. Ciofalo, P.A. Di Maio,
I. Di Piazza, M. Giardina, C. Lombardo, E. Oliveri, S. Puleo, G. Vella**

CERSE-UNIPA RL 1200/2008

Palermo, Novembre 2008

*Lavoro svolto in esecuzione della linea progettuale LP3 punto F dell'AdP ENEA MSE del 21/06/07,
Tema 5.2.5.8 – “Nuovo Nucleare da Fissione”*

INDICE

INTRODUZIONE E SOMMARIO	4
SIMBOLOGIA	5
SIMBOLI GRECI	6
PEDICI	6
1. RASSEGNA DI LETTERATURA	8
1.1 CONVEZIONE NATURALE CON GENERAZIONE INTERNA DI POTENZA: RILEVANZA DEL PROBLEMA ED APPLICAZIONI	8
1.2 STRATI FLUIDI E CAVITÀ CON GENERAZIONE INTERNA DI POTENZA	9
1.3 CONVEZIONE NATURALE IN FLUIDI A BASSO NUMERO DI PRANDTL	12
1.4 CONVEZIONE NATURALE NON STAZIONARIA IN CAVITÀ	13
2. MODELLI E METODI	16
2.1 EQUAZIONI DEL MOTO	16
2.2 FORMULAZIONE ADIMENSIONALE	16
2.3 SOLUZIONI ANALITICHE	17
2.4 CENNI SULL'ANALISI DI STABILITÀ LINEARE	18
2.5 METODI NUMERICI	20
2.6 REQUISITI DI ACCURATEZZA	25
2.7 SPETTRI	26
2.8 VALIDAZIONE DEL METODO PER CAVITÀ SCALDATA DIFFERENZIALMENTE	27
2.9 STUDIO DI "GRID INDEPENDENCE"	28
3. RISULTATI PER $AR=4$	30
3.1 MOTO STAZIONARIO	30
3.2 MOTO PERIODICO	31
3.3 TRANSIZIONE AL COMPORTAMENTO CAOTICO	34
3.4 MOTO PIENAMENTE CAOTICO	35
3.5 FREQUENZA DI RINNOVO DEI RULLI	37
3.6 ATTRATTORE DEL SISTEMA DINAMICO	39
3.7 MEDIE E MOMENTI	40
3.8 ATTRITO DI PARETE E SCAMBIO TERMICO	41
3.9 CONCLUSIONI PER $AR=4$	42

4. RISULTATI PER AR=1	45
4.1 MOTO STAZIONARIO	45
4.2 MOTO PERIODICO	46
4.3 TRANSIZIONE AL COMPORTAMENTO CAOTICO	47
4.4 MOTO PIENAMENTE CAOTICO	48
4.5. ATTRATTORE DEL SISTEMA DINAMICO	49
4.6 ISTERESI	50
4.7 ATTRITO DI PARETE E SCAMBIO TERMICO	51
4.8. CONCLUSIONI PER AR=1	53
5. RISULTATI PER AR=0.25	55
5.1 MOTO STAZIONARIO	55
5.2 MOTO PERIODICO	56
5.3 MOTO CAOTICO	57
5.4 ATTRITO DI PARETE E SCAMBIO TERMICO.	57
5.5 CONCLUSIONI PER AR=0.25	58
6. CONFRONTO CON MODELLI DI TURBOLENZA	60
6.1 EQUAZIONI DEI MODELLI	61
6.2 RISULTATI	63
7. CONCLUSIONI	66
BIBLIOGRAFIA	69
FIGURE	74

Introduzione e sommario

Il presente rapporto riassume alcuni risultati computazionali ottenuti presso il Dipartimento di Ingegneria Nucleare dell'Università degli Studi di Palermo sulla convezione naturale che si sviluppa in un fluido a basso numero di Prandtl (metallo liquido) in presenza di generazione interna di potenza.

Lo studio è stato motivato principalmente dai problemi connessi all'analisi termoidraulica e di sicurezza di reattori nucleari innovativi di IV Generazione refrigerati a metallo liquido, ed in particolare del reattore a piombo (LFR); esso è mirato ad ottenere, mediante i metodi della fluidodinamica numerica (CFD), una migliore comprensione delle principali fenomenologie attese in presenza di incidenti gravi che comportino la fusione del nocciolo. Inoltre, i risultati computazionali ottenuti potranno fungere da "benchmark" per simulazioni più complete, ma necessariamente meno dettagliate, basate su codici di sistema e di sicurezza.

Inoltre, grazie alla sua natura fondamentale, lo studio può considerarsi di interesse più generale e può applicarsi anche altre problematiche, quali la refrigerazione di "breeder blanket" a metallo liquido per reattori nucleari a fusione.

Nel presente studio si è supposto che il fluido occupi una cavità rettangolare con pareti verticali isoterme e pareti orizzontali adiabatiche e si sono fatti variare in un ampio intervallo il fattore di forma ed il numero di Grashof. Il metodo d'indagine principale utilizzato è stato la simulazione numerica diretta bidimensionale mediante il metodo dei volumi finiti, estesa ai casi stazionari, periodici e caotici e accompagnata da diverse tecniche per l'analisi statistica, la visualizzazione e l'interpretazione dei risultati.

Dopo un'ampia rassegna di letteratura (Cap. 1), nel capitolo 2 è descritto uno studio teorico preliminare volto a chiarire la fenomenologia di base del problema; sono presentate soluzioni analitiche e viene descritta per grandi linee l'analisi di stabilità del moto parallelo. Nello stesso capitolo sono descritti i metodi di calcolo utilizzati e sono riportate alcune verifiche di accuratezza numerica.

Nei capitoli 3, 4 e 5 sono discussi i risultati delle simulazioni dirette per i vari fattori di forma studiati (4, 1 e 0.25, rispettivamente).

Nel capitolo 6 si presenta un confronto tra i risultati ottenuti dalle precedenti simulazioni dirette e quelli forniti da alcuni modelli di turbolenza.

Infine, nel capitolo 7 si riportano le principali conclusioni che possono trarsi dagli studi condotti.

Simbologia

AR	fattore di forma della cavità, H/D	[-]
C_f	coefficiente d'attrito	[-]
D	distanza fra le pareti attive della cavità	[m]
e	energia cinetica adimensionale delle fluttuazioni	[-]
F	frequenza	[s ⁻¹]
f	frequenza adimensionale, $F \cdot \tau_0$	[-]
g	accelerazione di gravità	[ms ⁻²]
Gr	numero di Grashof per riscaldamento interno, $g\beta q D^5 / (\chi \nu^2)$	[-]
Gr_E	numero di Grashof per riscaldamento esterno, $g\beta \Delta \vartheta D^3 / \nu^2$	[-]
H	altezza della cavità	[m]
Nu_1	primo numero di Nusselt per riscaldamento int., $1/T_{max}$	[-]
Nu_2	secondo numero di Nusselt per riscaldamento int., $(2/3)/\langle T \rangle$	[-]
Nu	numero di Nusselt per riscaldamento est., $(q'' D) / (\chi \Delta \vartheta)$	[-]
P	pressione	[Nm ⁻²]
p	pressione adimensionale, $P / (\rho U_0^2)$	[-]
Pr	numero di Prandtl, ν / α	[-]
q	densità di potenza	[Wm ⁻³]
q''	flusso termico	[Wm ⁻²]
Ra	numero di Rayleigh per riscaldamento int., $Gr Pr$	[-]
Ra_E	numero di Rayleigh per riscaldamento est., $Gr_E Pr$	[-]
S_M	termine di sorgente della equazione della quantità di moto	[ms ⁻²]
S_H	termine di sorgente della equazione del calore	[Ks ⁻¹]
t	tempo adimensionale, τ / τ_0	[-]
T	temperatura adimensionale	[-]
U, V, W	componenti del vettore velocità	[ms ⁻¹]
V	vettore velocità	[ms ⁻¹]
u, v, w	velocità adimensionali, $U/U_0, V/U_0, W/W_0$	[-]
v	vettore velocità adimensionale	[-]
X, Y, Z	coordinate	[m]
x, y, z	coordinate adimensionali $X/D, Y/D, Z/D$	[-]

Simboli greci

α	diffusività termica	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$
β	coefficiente di dilatazione cubica, $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$	$[\text{K}^{-1}]$
Γ	velocità di propagazione delle onde	$[\text{ms}^{-1}]$
γ	velocità di propagazione delle onde adimensionale, Γ/U_0	$[-]$
δ	spessore adimensionale dello strato limite	$[-]$
Δ	scala della griglia di calcolo	$[\text{m}]$
$\Delta\tau$	passo temporale	$[\text{s}]$
δ_s	scala adimensionale della griglia di calcolo, Δ/D	$[-]$
δt	passo temporale adimensionale	$[-]$
$\Delta\vartheta$	differenza di temperatura per riscaldamento differenziale	$[\text{K}]$
ε	dissipazione dell'energia turbolenta	$[\text{W kg}^{-1}]$
ϑ	temperatura	$[\text{K}]$
ϑ_c	massima temperatura conduttiva per riscaldamento int., $(qD^2)/(8\chi)$	$[\text{K}]$
Λ	lunghezza d'onda	$[\text{m}]$
Λ_K	scala dissipativa di Kolmogorov, $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$	$[\text{m}]$
λ	lunghezza d'onda adimensionale, Λ/D	$[-]$
ν	viscosità cinematica	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$
ρ	densità	$[\text{kg/m}^3]$
τ_M	scala temporale diffusiva della quantità di moto, D^2/ν	$[\text{s}]$
τ_H	scala temporale diffusiva del calore, D^2/α	$[\text{s}]$
τ	tempo	$[\text{s}]$
φ	scalare generico	$[\text{n.a.}]$
χ	conducibilità termica	$[\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$
$\nabla\vartheta$	gradiente verticale di temperatura	$[\text{Km}^{-1}]$

Pedici

BV	Brunt-Väisälä
c	conduttivo;
cr	critico
conv	convettivo
e	esterno
i	interno

K	Kolmogorov
min / max	minimo / massimo
P	periodico
w	parete
x, y, z	direzioni
0	riferimento
1 ... 5	punti di monitoraggio

1. Rassegna di letteratura

1.1 Convezione naturale con generazione interna di potenza: rilevanza del problema ed applicazioni

La convezione naturale con generazione interna di potenza è stata meno studiata rispetto al moto di fluidi in cavità con riscaldamento differenziale. Lavori sull'argomento iniziarono ad apparire regolarmente in letteratura negli anni '50, quando l'interesse verso i reattori nucleari alimentati a combustibile circolante motivò un gran numero di studi analitici e sperimentali. Intorno alla metà degli anni 50, l'interesse verso la convezione naturale con sorgenti di calore distribuite fu stimolato anche dalla rivoluzionaria teoria di Wegener secondo cui la litosfera della terra galleggia su un mantello convettivo [Runcorn, 1962].

Nel contesto delle tecnologie più attuali, la convezione naturale con sorgenti di calore distribuite si incontra in un elevato numero di applicazioni di vario genere sia tradizionali (processi chimici, metallurgici ed elettrolitici) che nucleari, quali l'asportazione del calore residuo dal nocciolo fuso di un reattore a fissione (*corium*) a seguito di un incidente distruttivo [Baker *et al.*, 1976], la refrigerazione di *blanket* per reattori nucleari a fusione [Proust *et al.*, 1993] e il comportamento delle sorgenti di neutroni di spallazione in metallo liquido per sistemi a fissione subcritici, o ADS [Gudowski, 1999].

Come passo preliminare per una la comprensione dei complessi fenomeni fluidodinamici che si verificano nelle configurazioni di cui sopra e simili, è stato condotto uno studio computazionale della convezione naturale in un liquido con sorgente interna di calore. Il valore scelto per il numero di Prandtl, $Pr \approx 0.03$, è rappresentativo di metalli liquidi quali il piombo o le sue leghe (Li-Pb, Pb-Bi). Il dominio di calcolo è una cavità rettangolare con le pareti inferiore e superiore adiabatiche e quelle laterali isoterme. Gli obiettivi dello studio sono stati:

- Determinare sotto quali condizioni il moto sia stazionario, periodico o caotico;
- Chiarire la natura ed i dettagli delle transizioni tra i diversi regimi di moto;
- Capire se e come il campo di moto si spezza in celle o vortici convettivi;
- Accertare l'importanza relativa dello scambio termico convettivo rispetto a quello conduttivo;
- Accertare quale modello di turbolenza sia adatto a simulare meglio i regimi di moto caotico;
- Studiare l'influenza del fattore di forma della cavità sulla fenomenologia del moto e dello scambio termico.

1.2 Strati fluidi e cavità con generazione interna di potenza

Una rassegna sulla convezione naturale con generazione interna di potenza in cavità è data da Kulacki e Richards [1985]. Lo studio di Barakat [1965] sul comportamento del transitorio e dello stato stazionario di un fluido in cavità rettangolare verticale scaldata internamente è di interesse storico poiché rappresenta il primo tentativo di risolvere le equazioni complete di Navier-Stokes. De Socio *et al.* [1979] considerarono cavità rettangolari con pareti terminali adiabatiche e fattore di forma $AR=2$. Essi indagarono i moti per $4 \cdot 10^3 < Gr < 4 \cdot 10^5$ (dove Gr è il numero di Grashof definito appresso), e $0.1 < Pr < 5$. Inoltre, considerarono soluzioni transitorie sia per riscaldamento interno che esterno. Gli autori trovarono un minimo nello scambio di termico, al disotto del livello puramente conduttivo, per i più elevati valori di Gr compatibili con stati laminari stazionari. Questo risultato è in accordo con il presente studio come sarà mostrato in seguito.

Uno studio per cavità rettangolare verticale fu condotto da Richards [1981]. I risultati numerici furono ottenuti usando una formulazione vorticità–funzione di corrente stazionaria per le equazioni del moto. I calcoli riguardano moti con numero di Rayleigh (definito dopo) $6.4 \cdot 10^3 < Ra < 2 \cdot 10^{10}$, $Pr > 0.1$ e $0.5 < AR < 4$. Fu ottenuto un buon accordo con i risultati sperimentali per $Pr=6.5$ e $AR=1.2$. L'autore, però, considerò un piano verticale di simmetria al centro della cavità, escludendo così la possibilità di predire eventuali stati stazionari asimmetrici (si veda il capitolo 4).

Inoltre i risultati per i più elevati Ra sono probabilmente poco attendibili in quanto ottenuti usando un algoritmo stazionario senza alcun modello di turbolenza.

La convezione naturale in strati fluidi orizzontali, con un fattore di forma (dimensione orizzontale/altezza) grande o infinito, è stata oggetto di molti studi teorici e sperimentali soprattutto in due contesti: la geofisica della convezione nel mantello terrestre [Tritton e Zarraga, 1967] e la rimozione del calore prodotto dal nocciolo fuso di un reattore nucleare [Gluekler e Baker, 1977]. Per uno strato fluido orizzontale di spessore D , con una densità di potenza uniforme q , conduttività χ , ed entrambe le pareti mantenute alla stessa temperatura, per valori sufficientemente bassi di q il trasferimento di calore avviene soltanto per conduzione, stabilendo un profilo di temperatura parabolico con un massimo in mezz'aria del valore $\vartheta_c = (qD^2)/(8\chi)$. La teoria della stabilità lineare prevede che l'inizio della convezione avvenga per un valore critico Ra_{cr} del numero di Rayleigh $Ra = g\beta q D^5 Pr / (\chi \nu^2)$ di ~ 37400 . La convezione presenta una struttura in pianta multi cellulare con flusso discendente al centro delle celle (contrariamente a ciò che avviene nella convezione di Rayleigh-Bénard), almeno per numeri di Prandtl elevati o intermedi [Kulacki e Goldstein, 1972; Grötzbach, 1987]. Le celle sono stazionarie fino a numeri di Rayleigh pari a $\sim 80 \cdot Ra_{cr}$, mentre per Ra maggiori esse divengono non stazionarie, e inizia il moto caotico.

Il problema di uno strato fluido riscaldato internamente con la temperatura della parete superiore assegnata e quella inferiore adiabatica è stato studiato da molti autori nel passato. Le ricerche teoriche e sperimentali su questo sistema cominciarono negli anni Sessanta con gli articoli di Tritton e Zarraga

[1967] e Thirlby [1970]. Negli anni Settanta Schwideriski e Schwab [1971] e Tveitereid e Palm [1976] studiarono questo caso sia in prossimità che ben al di sopra del valore critico per l'innesco del moto. La teoria della stabilità lineare, per tali condizioni al contorno, prevede l'innesco della convezione ad un valore del numero di Rayleigh di 2772. La struttura della convezione è ancora caratterizzata approssimativamente da un campo a celle esagonali con moto discendente al centro delle celle per numeri di Prandtl al di sopra di 0.25, ma ascendente a bassi Pr . Gli esagoni possono divenire instabili ad alti Ra ($>40 \cdot Ra_c$) a favore di celle a rullo, sebbene vi sia qualche controversia su questo punto.

Per ciò che riguarda cavità con pianta finita, molti studi hanno trattato le cavità appiattite con numeri di Prandtl di $\sim 3-7$, che sono facilmente ottenibili usando come fluidi di lavoro acqua fredda o elettroliti. Cavità appiattite raffreddate solamente dalla parete superiore furono studiate sperimentalmente da vari autori [Fiedler e Wille, 1971; Kulacki e Nagle, 1975; Kulacki e Emara, 1977]. Gli autori osservarono che la transizione da convezione laminare a turbolenta avveniva per $Ra \sim 10^7$, e furono trovate distribuzioni di temperatura ben miscelate per numeri di Rayleigh elevati. Si trovò, comunque, che il numero di Nusselt aumentava con $Ra^{0.23-0.24}$ (un comportamento tipico della convezione laminare con strati limite accoppiati) nell'intero campo compreso tra $Ra=10^3$ e $Ra=10^{12}$. Per ciò che riguarda i risultati numerici, Churbanov *et al.* [1994] usarono la simulazione diretta bidimensionale (con formulazione $\psi-\omega$ delle equazioni di Navier-Stokes) per calcolare il campo di moto e lo scambio termico in cavità rettangolari appiattite scaldate internamente (fattore di forma da 0.25 a 1) per numeri di Rayleigh compresi tra 10^5 e $\sim 10^8$ e $Pr=7$. Essi studiarono anche altre condizioni termiche al contorno (incluso il caso di tutte le pareti isoterme, una configurazione con pareti orizzontali isoterme e verticali adiabatiche, e una variante con la parete superiore isoterma e le altre adiabatiche) ed ottennero rotture di simmetria e soluzioni periodiche non stazionarie, sebbene le griglie usate per i suddetti calcoli fossero piuttosto grossolane (per esempio 40×80 nodi)

Daniels e Jones [1998] presentarono uno studio numerico per cavità appiattita con densità di potenza uniforme, pareti laterali isoterme e pareti orizzontali adiabatiche. Gli autori usarono un metodo di espansione asintotica accoppiato valido per numeri di Rayleigh (basati sull'altezza della cavità) dell'ordine di $1/AR$. Cavità rettangolari appiattite ($AR=0.5$) con pareti laterali isoterme e pareti orizzontali adiabatiche furono anche studiate da Farouk [1988] per $Pr=6.5$; egli usò il modello di turbolenza $k-\epsilon$ per $2 \cdot 10^6 < Ra < 2 \cdot 10^9$ così che la non stazionarietà del moto non fu simulata direttamente, e adottò un approccio ad avanzamento temporale per giungere allo stato stazionario finale. Egli ottenne soluzioni che mostravano una rottura della simmetria bilaterale.

Dinh e collaboratori [Bui e Dinh, 1996; Dinh e Nourgaliev, 1996, 1997] simularono il moto e il trasferimento di calore del corium in piscine semisferiche o rettangolari per $Ra > \sim 10^{14}$ e $Pr=3 \sim 7$. Essi valutarono diversi modelli alternativi di turbolenza a fronte dei risultati di simulazione dirette e dei dati sperimentali disponibili sullo scambio termico, e scelsero un modello $k-\epsilon$ per bassi numeri di Reynolds modificato come quello che dava il migliore accordo con le misure.

May [1991] presentò uno studio numerico bidimensionale di convezione naturale in cavità

quadrata di lato D con generazione interna di calore, inclinata di un angolo generico φ rispetto all'orizzontale. Tutte e quattro le pareti erano isoterme, il numero di Prandtl era 7, e il numero di Rayleigh (definito come sopra) era compreso tra $6.4 \cdot 10^5$ e $9.6 \cdot 10^6$. Per $\varphi = 0$ e $Ra > 3.2 \cdot 10^6$, May ottenne soluzioni periodiche oscillanti. Per $Ra = 6.4 \cdot 10^6$, il periodo dell'oscillazione era $\sim 0.38(D^2/\nu)$. Le griglie di calcolo utilizzate erano relativamente grossolane (al più 61×61 celle) e una significativa dipendenza residua dalla griglia era ancora presente nei risultati. I risultati numerici furono paragonati con le misure sperimentali della distribuzione di temperatura e dello scambio termico condotte da Lee e Goldstein [1988] usando interferometria in una cavità riempita di acqua salata. Fu trovato un buon accordo per quanto riguardava i campi di moto e i massimi della temperatura, ma qualche disaccordo per quanto riguardava il flusso termico alle pareti per i valori più piccoli dell'angolo φ ($0^\circ - 15^\circ$).

Anche la presenza *simultanea* di generazione interna di potenza e riscaldamento differenziale in cavità è stata oggetto di alcuni studi. Per questo problema è bene introdurre accanto al numero di Rayleigh interno Ra , definito come sopra, anche il numero di Rayleigh esterno $Ra_e = g\beta\Delta\vartheta D^3 Pr/\nu^2$, che tiene conto della differenza di temperatura imposta tra le due pareti attive.

Alcuni lavori riguardarono inizialmente campi di moto di strati fluidi orizzontali e appiattiti scaldati internamente in presenza di gradienti termici verticali stabili o instabili [Suo-Anttila e Catton, 1975; Cheung, 1978; Kikuchi *et al.*, 1982; Boon-Long *et al.*, 1979]. Acharya e Goldstein [1985] presentarono un studio numerico per un contenitore quadrato orientato in modo arbitrario rispetto all'orizzontale e caratterizzato da $Pr=0.7$, Ra , Ra_e fino a 10^7 . Il moto del fluido per lo stato stazionario fu risolto da una griglia grossolana (32×32) bidimensionale usando l'algoritmo di accoppiamento pressione velocità SIMPLER e uno schema di discretizzazione esponenziale per i termini convettivi. Una grande varietà di campi di moto furono ottenuti facendo variare i due numeri di Rayleigh e l'inclinazione; nel caso di cavità verticale si notò che per $Ra/Ra_e < 1$ la circolazione era unicellulare, e il moto lungo la parete calda era diretto verso l'alto, mentre per $Ra/Ra_e > 10$ si sviluppava un campo a due celle, con moto discendente lungo entrambe le pareti. Per valori intermedi di Ra/Ra_e ($1 \sim 10$) si trovarono campi complessi multicellulari.

Più recentemente, Fusegi *et al.* [1992a] hanno presentato simulazioni numeriche per una cavità quadrata ottenute usando uno schema di discretizzazione temporale implicito, un metodo ai volumi finiti, l'algoritmo di accoppiamento pressione velocità SIMPLE e lo schema di discretizzazione QUICK del terzo ordine per i termini convettivi. Il numero dei punti di griglia era 122×122 , il numero di Prandtl 5.85 e le pareti orizzontali erano adiabatiche. Per il caso $Ra_e = 0$ (sola generazione interna di potenza), gli autori ottennero soluzioni stazionarie con simmetria bilaterale fino a $Ra = 10^{10}$. L'introduzione di riscaldamento differenziale portò alla rottura della simmetria destra sinistra delle soluzioni lasciandole, però, stazionarie. Gli stessi autori [Fusegi *et al.*, 1992b] hanno esteso in seguito i loro studi ad altri fattori di forma da 0.3 a 5 ottenendo ancora soluzioni stazionarie per Ra fino a $\sim 10^{10}$.

Shim e Hyun [1997] portarono la loro attenzione allo sviluppo del moto in transitorio a partire

da fluido fermo e isoterma; essi considerarono una cavità quadrata con $Pr=0.7$ per $Ra=10^5\sim 2\times 10^7$ e $Ra_E=10^5\sim 10^7$. Per Ra sostanzialmente più grande di Ra_E trovarono che il moto iniziale era dominato dal riscaldamento esterno, mentre lo stato stazionario finale era dominato da quello interno; la costante di tempo per il raggiungimento delle condizioni finali variava come $Ra_i^{-1/4}$.

Esperimenti di visualizzazione del moto furono condotti da Kawara *et al.* [1990; 1994] per lo stesso campo di parametri usato in Fusegi *et al.* [1992a; 1992b], ad esempio $AR=0.3\div 5$, $Pr=5.85$, $Ra_i=10^8\sim 10^{10}$, $Ra_E=10^6\sim 10^8$, usando una soluzione acquosa diluita di cloruro di potassio scaldata elettricamente. Risultati simili furono presentati da Wang e Wang [1988] per $Ra_i \approx 10^4\sim 10^6$, $Ra_E \approx 5\cdot 10^4$.

Questi esaminati sinora sono gli unici studi nei quali le condizioni si avvicinano da presso a quelle prese in esame nel presente lavoro; comunque, spunti utili si possono ottenere dall'esame di altri studi che condividono almeno qualche aspetto con il presente lavoro.

1.3 Convezione naturale in fluidi a basso numero di Prandtl

Molti studi sono stati dedicati a bassi numeri di Prandtl in convezione naturale; in assenza, comunque, di generazione interna di potenza, e cioè, lontani dalle condizioni nelle quali ci troviamo. Molti di detti lavori sono concentrati sulla convezione di Rayleigh-Bénard in strati di metalli liquidi, ed in particolare, sul calcolo del flusso termico q'' attraverso lo strato. Per strati di fluido differenzialmente scaldati con salto di temperatura tra le pareti $\Delta\theta$ il numero di Rayleigh è definito solitamente come $Ra=g\beta\Delta\theta D^3 Pr/\nu^2$. Questo può essere paragonato con la definizione precedentemente data per strati fluidi scaldati internamente osservando che, nell'ultimo caso, una scala naturale di temperatura è il salto termico θ_c della distribuzione puramente conduttiva. Infatti, in accordo con le condizioni al contorno termiche, questa è data da $\theta_c=qD^2/(8\chi)$ (se entrambe le pareti sono isoterme e alla medesima temperatura) o da $\theta_c=qD^2/(2\chi)$ (se una delle due pareti è isoterma, l'altra adiabatica). Per esempio, i risultati sperimentali di Kek [1989] per strati orizzontali di sodio liquido ($Pr\approx 0.006$) scaldati dal basso mostrarono che, facendo seguito all'inizio della convezione per $Ra\approx 1600$, il numero di Nusselt, definito come $q''D/(\Delta\theta\chi)$, rimaneva vicino a 1 fino a $Ra\approx 10^4$ e poi cresceva come $Ra^{0.32}$ nel campo $1\cdot 4\cdot 10^4$, come $Ra^{0.25}$ per $Ra\approx 4\cdot 10^4\text{-}8\cdot 10^4$, e come $Ra^{0.2}$ per $Ra>8\cdot 10^4$, fino a un massimo valore di ~ 2.6 ottenuto per $Ra\approx 2.5\cdot 10^5$.

Ulteriori simulazioni numeriche per la convezione Rayleigh-Bénard in metalli liquidi furono presentate, fra gli altri, da Grötzbach [1990], che studiò mercurio ($Pr\approx 0.021$) a $Ra\approx 6000$, e Bertin e Ozoe [1986], che confrontarono differenti numeri di Prandtl. Gli ultimi autori, usando una simulazione bidimensionale agli elementi finiti con condizioni al contorno laterali periodiche, trovarono che il numero di Rayleigh critico per l'inizio della convezione di Rayleigh-Bénard decresce con il numero di Prandtl da 2095 ($Pr=0.01$) a 1708 ($Pr\rightarrow 0$). Per $Pr=0.01$, estesero le loro simulazioni numeriche a

valori moderati di Ra (~ 4000).

Un numero di studi sono stati presentati per bassi numeri di Prandtl in convezione naturale in cavità rettangolari con pareti verticali differientemente scaldate e fattore di forma minore di 1, spesso in relazione ai problemi di crescita dei cristalli. Per questa configurazione, nel limite di bassi numeri di Rayleigh, moto bidimensionale e estensione orizzontale infinita, esiste una soluzione analitica (detta “cella di Hadley”). Braunsfurth *et al.* [1997] trovarono sperimentalmente e con simulazioni bidimensionali agli elementi finiti che, per $Pr \approx 0.025$ (gallio liquido), al crescere del numero di Rayleigh da $1.6 \cdot 10^5$ a $8 \cdot 10^5$ si osserva un progressivo distacco dalla soluzione a cella di Hadley; la soluzione laminare stazionaria bidimensionale è stabile per disturbi bidimensionali e non si riscontra alcuna biforcazione di Hopf verso un comportamento oscillatorio. Comunque precedenti studi condotti a più bassi Pr [Winters, 1988] mostrarono che una biforcazione di Hopf si riscontra per $Ra = 36500$ a $Pr = 0.015$ e per $Ra/Pr \rightarrow 1.63 \cdot 10^6$ a $Pr \rightarrow 0$.

Simulazioni tridimensionali della convezione naturale in gallio in cavità rettangolari con diversi fattori di forma per $Ra \approx 10^6$ furono condotte da Viskanta *et al.* [1986] usando un metodo alle differenze finite e griglie piuttosto grossolane. I risultati furono confrontati con distribuzioni sperimentali di temperatura. Per il numero di Rayleigh studiato si trovò che il moto era stazionario; gli autori osservarono che gli effetti tridimensionali erano significativi e, a causa del basso numero di Prandtl, si estendevano fino al piano medio della cavità anziché essere confinati alle pareti frontale e posteriore. Si dimostrò cruciale anche la modellazione delle condizioni termiche al contorno.

1.4 Convezione naturale non stazionaria in cavità

Un numero relativamente maggiore di studi sono stati presentati sulla convezione naturale in cavità differenzialmente scaldate con fluidi con numero di Prandtl dell'ordine di 1 o maggiore (caratteristica dell'aria, dell'acqua o altri fluidi comuni). Sebbene tali condizioni siano un po' lontane da quelle considerate nel presente studio, alcune delle conclusioni principali saranno qui menzionate.

Per numeri di Rayleigh Ra maggiori di 10^7 - 10^8 , il moto presenta tipicamente due strati limite sottili che cambiano bruscamente direzione negli angoli, e una regione centrale stabilmente stratificata che è pressoché stagnante e partecipa poco al trasferimento di calore. È possibile definire una frequenza di Brunt-Väisälä $F_{BV} = (g\beta |\nabla\vartheta|)^{1/2} / (2\pi)$, basata sul gradiente verticale medio di temperatura $\nabla\vartheta$ nella regione centrale, e tale che le perturbazioni che hanno frequenza maggiore della F_{BV} sono smorzate al centro, mentre le frequenze più basse si propagano nella forma di onde di gravità.

Per esempio, Xin e Le Quéré [1995] simularono il moto in una cavità di fattore di forma 4 a $Ra = 10^7 \sim 1.6 \cdot 10^8$ per $Pr = 0.71$ (aria). Essi trovarono che in questo intervallo il moto era caotico; le perturbazioni che per prime destabilizzavano la soluzione stazionaria ottenuta per più bassi numeri di Rayleigh erano onde di Tolmien-Schlichting originate negli strati limite discendenti. La regione centrale rimaneva quiescente fino a $Ra \approx 3 \cdot 10^7$; infatti si formavano (ai margini degli strati limite)

soltanto vortici di piccola scala e alta frequenza, che non si potevano propagare nella regione a stratificazione stabile, la quale agiva da filtro passa basso. Solamente per Ra maggiori i vortici turbolenti divengono abbastanza grandi da contenere energia a frequenze minori della frequenza di taglio F_{BV} e propagarsi quindi nella regione centrale, che diviene così instabile. Ciò è in contraddizione con quanto trovato per cavità quadrate, per esempio, da Paolucci [1990], e cioè una zona centrale quiescente anche a numeri di Rayleigh molto elevati.

Janssen e Henkes [1995] condussero simulazioni bidimensionali per cavità quadrate differientemente scaldate per numeri di Rayleigh che andavano da $\sim 10^7$ a $\sim 10^{10}$ e numeri di Prandtl tra 0.25 e 7 usando un metodo ai volumi finiti e griglie fino a 160×160 nodi. Per numeri di Prandtl tra 0.25 e 2, al crescere di Ra il moto mostrava una serie di transizioni, da stato stazionario a moto periodico, quasi periodico e, infine, caotico; invece, per numeri di Prandtl compresi tra 2.5 e 7, la transizione dallo stato stazionario a quello caotico era brusca e senza regimi intermedi. Gli autori osservarono che, nei casi a basso numero di Prandtl, la transizione a moto periodico era indotta da una instabilità inviscida di Kelvin-Helmoltz con sede immediatamente a valle del brusco cambiamento di direzione degli strati limite ascendente e discendente (cioè presso l'estremità superiore della parete calda e quella inferiore della parete fredda). Ciò dava luogo a oscillazioni di piccola ampiezza e frequenza $F_L \approx 0.12(g\beta\Delta\vartheta/H)^{1/2}$ (per bassi Pr). La prima transizione avveniva per un numero di Rayleigh di $\sim 1\text{-}2 \cdot 10^8$ nel caso $Pr=0.71$. Una ulteriore transizione a moto quasi periodico era indotta dalle instabilità negli strati limite; queste davano origine ad oscillazioni con frequenza F_H circa cinque volte più grande di quella delle oscillazioni periodiche. Questa seconda transizione avveniva a $Ra=2\text{-}3 \cdot 10^8$ nel caso $Pr=0.71$. Un ulteriore aumento di Ra portava a moto caotico, caratterizzato da uno spettro a larga banda.

Soltanto poche simulazioni dirette tridimensionali sono state presentate per convezione naturale non stazionaria e caotica in cavità rettangolari differientemente scaldate. Henkes e Le Quéré [1996] condussero tali simulazioni per una cavità di fattore di forma verticale 1 a $Pr=0.71$ usando un metodo spettrale impiegante fino a 109×109 modi di Chebyshev sui piani verticali normali alle pareti isoterme e 9 modi di Fourier lungo la profondità, dove venivano imposte condizioni al contorno periodiche. Il numero di Rayleigh andava da $\sim 10^6$ a $\sim 10^8$. Per pareti orizzontali perfettamente conduttive e $Ra=1.8 \cdot 10^6$, la soluzione base stazionaria era instabile a perturbazioni di temperatura tridimensionali di lunghezza d'onda compresa tra $0.6 \cdot D$ e $1.1 \cdot D$, mentre allo stesso Ra la soluzione era stabile rispetto a perturbazioni bidimensionali. Le simulazioni bidimensionali esibivano una biforcazione di Hopf a moto periodico per Ra compreso tra $1.8 \cdot 10^6$ e $2.3 \cdot 10^6$, in accordo con i già menzionati risultati di Janssen e Henkes [1995] per $Pr < 2$. Quando le pareti orizzontali erano adiabatiche, i numeri critici di Rayleigh aumentavano di quasi due ordini di grandezza, ma anche in questo caso le perturbazioni tridimensionali si dimostravano le più instabili.

Questi risultati suggeriscono che tutte le predizioni di transizione a soluzioni non stazionarie o caotiche ottenute da simulazioni bidimensionali dovrebbero essere accolte con cautela. Di contro, per

esempio, è noto che il moto a strato limite su piastra piana è più instabile alle perturbazioni bidimensionali, così che predizioni affidabili di non stazionarietà e transizione possono essere ottenute anche da simulazioni bidimensionali.

2. Modelli e metodi

2.1 Equazioni del moto

Il modello fisico adottato nel presente studio consiste in una cavità rettangolare, di altezza H e di larghezza D , contenente un fluido. Una rappresentazione della geometria (per $AR=4$) è data dalla figura 2.1, dove sono mostrati anche i punti di monitoraggio. Il moto del fluido è innescato da una densità di potenza interna uniforme q , le pareti laterali sono a temperatura imposta θ_w e le pareti superiore e inferiore sono adiabatiche. Il fluido considerato è caratterizzato da un numero di Prandtl pari a 0.0321, rappresentativo di un metallo liquido (lega Li-Pb) a 573 K.

Le equazioni che governano il moto di un fluido newtoniano incomprimibile con proprietà fisiche costanti sono le seguenti:

l'equazione di continuità,

$$\nabla \mathbf{V} = 0 \quad (2.1)$$

le equazioni della quantità di moto,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{S}_M \quad (2.2)$$

l'equazione del trasporto di calore,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \nabla \vartheta = \alpha \nabla^2 \vartheta + S_H \quad (2.3)$$

Il termine di sorgente \mathbf{S}_M nell'equazione della quantità di moto può essere usato per descrivere le forze di massa come ad esempio la forza peso, mentre il termine di sorgente S_H rappresenta la generazione interna di potenza.

2.2 Formulazione adimensionale

Per scrivere le equazioni in forma adimensionale è necessario introdurre delle scale per la lunghezza, la temperatura, il tempo, la velocità e la pressione. La scala naturale per le lunghezze è D , la distanza tra le pareti attive. Per la temperatura, è stata scelta la scala conduttiva $\vartheta_c = qD^2 / (8\chi)$, che rappresenta il massimo di temperatura in assenza di convezione. Come scala delle frequenze o scala dei tempi, per analogia con la frequenza di Brunt-Väisälä precedentemente definita $F_{BV} = (g\beta | \nabla \vartheta |)^{1/2} / (2\pi)$, che caratterizza moti stabilmente stratificati (si veda il paragrafo 1.4), si può introdurre un frequenza di riferimento $F_0 = (g\beta \vartheta_c / D)^{1/2} / (2\pi)$. La scala corrispondente per il tempo sarà $\tau_0 = F_0^{-1}$, che può essere scritta come $\tau_0 = (4\pi \sqrt{2} Gr^{-1/2}) \tau_M$, essendo $\tau_M = D^2 / \nu$ la scala dei tempi diffusiva della quantità di moto e $Gr = g\beta q D^5 / (\chi \nu^2) = Ra / Pr$ il numero di Grashof. Si deve notare che, se si tiene presente la definizione del numero di Grashof utilizzata per cavità differenzialmente scaldate $Gr = g\beta \Delta \vartheta L^5 / (\chi \nu^2)$, l'espressione di

Gr in presenza di generazione interna di potenza si ottiene ponendo $\Delta\vartheta=8\vartheta_c$ e $L=D$. Una scala delle velocità coerente con le definizioni date sopra è $U_0=D/\tau_0$, cioè il rapporto tra la scala delle lunghezze e quella del tempo. Infine una scala coerente per la pressione e gli sforzi tangenziali è ρU_0^2 . La scelta corretta delle scale sarà confermata a posteriori dai risultati numerici, in quanto le variabili del problema rimangono dell'ordine dell'unità in tutto il campo dei parametri studiato.

Le equazioni di continuità e della quantità di moto, assieme a quella del trasporto di calore, sotto l'approssimazione di Boussinesq (densità costante in tutti i termini fuorché in quello di buoyancy), diventano in forma adimensionale:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 4\pi^2 T \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{Gr} \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 8 \right) \quad (2.6)$$

nelle quali $x=X/D$, $y=Y/D$, $u=U/U_0$, $v=V/U_0$, $p=P/(\rho U_0^2)$, $T=(\vartheta-\vartheta_w)/\vartheta_c$, $t=\tau/\tau_0$.

Le condizioni al contorno sono:

$$u = v = 0, \quad \partial T / \partial y = 0 \quad \text{per } y = \pm AR/2 \quad (2.7a)$$

$$u = v = 0, \quad T = 0 \quad \text{per } x = \pm 1/2 \quad (2.7b)$$

E' da notare che alcuni autori preferiscono usare le scale diffusive $\tau_M=D^2/\nu$ o $\tau_H=D^2/\alpha$ per il tempo, e ν/D o α/D per la velocità; queste scale sono adatte a descrivere problemi a bassi numeri di Grashof, cioè problemi dominati dalla diffusione, mentre le scale scelte nel presente lavoro sono più adatte a problemi a numeri di Grashof elevati con un notevole contributo della convezione.

2.3 Soluzioni analitiche

Nell'ipotesi di cavità infinitamente lunga (moto parallelo) e sotto l'ipotesi di moto stazionario, le equazioni (2.4)-(2.6) con le condizioni al contorno (2.7) ammettono una semplice soluzione analitica, valida nei casi reali lontano dalle pareti orizzontali. Infatti, assumendo $\partial v / \partial y = \partial T / \partial y = 0$, segue dalla continuità che $u=0$; in più tutti i termini convettivi sono nulli, quindi $\partial p / \partial x = 0$ e le equazioni (2.4)-(2.6) divengono:

$$0 = -\frac{dp}{dy} + \frac{4\pi}{\sqrt{Gr}/2} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 4\pi^2 T \quad (2.8a)$$

$$0 = \frac{4\pi}{\sqrt{Gr/2} \cdot Pr} \cdot \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + 8 \right) \quad (2.8b)$$

con le due condizioni al contorno $v=T=0$ per $x=\pm 1/2$. Poiché il problema è indefinito nella direzione y , il gradiente verticale di pressione deve essere costante. Questa terza costante si determina imponendo che la portata netta di fluido attraverso una sezione orizzontale della cavità (integrale di v rispetto a x da $x=-1/2$ a $x=+1/2$) sia nulla; in alternativa, e con risultati equivalenti, essa può determinarsi imponendo che gli sforzi viscosi di parete facciano equilibrio al gradiente verticale di pressione. La soluzione che si ottiene allora per le (2.8) è:

$$v = \pi \sqrt{\frac{Gr}{2}} \cdot \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^2}{10} + \frac{1}{240} \right) \quad (2.9a)$$

$$T = 1 - 4x^2 \quad (2.9b)$$

La medesima soluzione è riportata da Kulacki e Richards [1985]. È da notare che la distribuzione della temperatura adimensionale segue un comportamento puramente conduttivo, indipendentemente dal valore del numero di Grashof o di Prandtl, e che la distribuzione adimensionale di velocità dipende solamente da Gr . L'attrito di parete, invece, una volta adimensionalizzato rispetto a ρU_0^2 , cioè espresso come un coefficiente di attrito C_f , è dato da $C_f = 4\pi^2/15 \approx 2.63$ che non dipende da Gr . La dipendenza della velocità adimensionale v da $Gr^{1/2}$ riflette il fatto che, nella situazione ideale qui considerata, la velocità (dimensionata) è in realtà proporzionale a q , cioè a Gr .

2.4 Cenni sull'analisi di stabilità lineare

L'analisi della stabilità lineare di un sistema idrodinamico viene effettuata sovrapponendo ai profili base della funzione di corrente $\Psi_B(x,t)$ e della temperatura $T_B(x,t)$ una perturbazione di piccola ampiezza ad onda viaggiante, cioè:

$$\Psi = \Psi_B(x,t) + \varepsilon[\psi(x)e^{i\alpha(y-\Gamma t)}], \quad (2.10a)$$

$$T = T_B(x,t) + \varepsilon[\tau(x)e^{i\alpha(y-\Gamma t)}], \quad (2.10b)$$

dove Ψ è definita da:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.11)$$

e dove $\psi(x)$ e $\tau(x)$ descrivono la dipendenza delle perturbazioni incognite della funzione di corrente e della temperatura dalla coordinata x , α è il numero d'onda (reale) e $\Gamma = \Gamma_r + i\Gamma_i$ la velocità complessa dell'onda. La parte reale di Γ dà la velocità di propagazione dell'onda (celerità), mentre la parte immaginaria descrive la crescita (o lo smorzamento) temporale.

Sostituendo la espansione di Ψ (2.10a) nelle espressioni di u e v (2.11), sostituendo poi le espressioni così ottenute e la espansione di T (2.10b) nelle equazioni della quantità di moto e del calore (2.5)-(2.6), trascurando i termini in cui compaiono i prodotti tra le perturbazioni e/o le loro derivate (linearizzazione), e indicando con v_B e T_B i profili base di velocità e temperatura (2.9), si ottiene il sistema differenziale del sesto ordine:

$$\begin{cases} \frac{4\pi^2\sqrt{2}}{\sqrt{Gr}}(\psi^{IV} - 2\alpha^2\psi^{II} + \alpha^4\psi) - i\alpha[(v_B - \Gamma)(\psi^{II} - \alpha^2\psi) - v_B^{II}\psi] + Pr^{-1}\tau^I = 0 \\ \frac{4\pi^2\sqrt{2}}{\sqrt{Gr}}(\tau^{II} - \alpha^2\tau) - i\alpha Pr[(v_B - \Gamma)\tau - T_B^I\psi] = 0 \end{cases} \quad (2.12a,b)$$

in cui numeri romani indicano le derivate successive e le condizioni al contorno sono: $\psi=\psi^I=\tau=0$ per $x=\pm 1/2$.

Per dato numero di Grashof e numero d'onda α , questo è un problema agli autovalori Γ nel campo complesso con autofunzioni $\psi(x)$ e $\tau(x)$. Poiché le perturbazioni che rendono il moto instabile (cioè che tendono ad amplificarsi) sono quelle che hanno Γ_i positiva, mentre quelle con Γ_i negativa tendono a smorzarsi e non sono destabilizzanti, ci interessa valutare per quali valori dei due parametri indipendenti (Gr e α) la quantità Γ_i si annulli (stabilità marginale). In particolare esiste un valore di Gr (chiamato Grashof critico Gr_c) al di sotto del quale il moto è sempre stabile per ogni α .

Nel presente caso (numero di Prandtl molto piccolo) solamente le perturbazioni idrodinamiche sono rilevanti, quindi il problema si riduce alla risoluzione di una equazione differenziale di quarto ordine nella sola incognita $\psi(x)$ (equazione di Orr-Sommerfeld).

Questa è stata studiata e risolta mediante il metodo di Galerkin, anche per il presente problema, da Gershuni e collaboratori come riportato da Kulacký e Richards [1985]. Essi considerarono fluidi sia a basso che ad alto numero di Prandtl, come pure l'effetto dell'inclinazione della cavità.

Con un profilo base di velocità assial-simmetrico, la teoria di stabilità lineare ammette che sia le perturbazioni pari che dispari si possano propagare. Entrambe le instabilità nascono nelle regioni di elevato sforzo tangenziale dove la velocità cambia segno, cioè all'interfaccia tra la colonna centrale ascendente e gli strati limite discendenti. Il minimo numero di Grashof critico e la corrispondente lunghezza d'onda adimensionale sono: $Gr_c \approx 1.108 \cdot 10^8$ e $\lambda \approx 1.532$ per le perturbazioni di velocità asimmetriche, e $\sim 4.595 \cdot 10^5$ e ~ 2.001 , rispettivamente, per quelle simmetriche. Come era prevedibile, le perturbazioni di velocità asimmetriche sono le più instabili. In più lo studio di Gershuni mostra che la maggior parte delle perturbazioni hanno una velocità di propagazione Γ_r negativa, cioè scendono lungo la cavità. E' meglio scalare tale velocità usando la velocità diffusiva α/D piuttosto che la velocità convettiva $U_0 = (\alpha/D) \cdot Pr \cdot Gr^{1/2} / (4\pi\sqrt{2})$, che tende a zero con Pr .

Per numeri di Prandtl finiti, si deve tenere conto degli effetti termici. Gli stessi autori mostrarono

che all'aumentare del numero di Prandtl, Gr_c diminuisce monotonicamente e λ_c aumenta di valore. In particolare, nel caso limite $Pr \gg 1$, si ottiene $Gr_c = 31232 \cdot Pr^{-1/2}$. La Tabella 2.1 riassume i risultati relativi ai parametri critici summenzionati. Tali risultati saranno meglio discussi a fronte dei risultati numerici ottenuti nel presente lavoro nel capitolo 3 e seguenti.

Pr	Gr_c	Λ_c/D	$\Gamma_c D/\alpha$
0	$1.1080 \cdot 10^5$	1.532	-0.08
0.001	$1.109926 \cdot 10^5$	1.519	-0.07855
0.1	$1.100659 \cdot 10^5$	1.536	-0.1032
0.71	$5.87624 \cdot 10^4$	2.205	-0.384
5	$1.66208 \cdot 10^4$	2.327	-0.605
10	$1.0944 \cdot 10^4$	2.285	-0.6485
20	$7.3728 \cdot 10^3$	2.252	-0.681
100	$3.10592 \cdot 10^3$	2.205	-0.702
$\gg 1$	$31232 \cdot Pr^{-1/2}$		

Tabella 2.1

Parametri critici per la stabilità lineare di uno strato verticale con riscaldamento interno.

2.5 Metodi numerici

Le equazioni (2.4)-(2.6) sono state risolte numericamente usando un codice “*in-house*” a volumi finiti.

In particolare, le (2.5) e (2.6) possono essere viste come casi particolari della equazione di bilancio, scritta per la generica grandezza φ :

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial\tau} + \frac{\partial\rho U_j\varphi}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \chi \frac{\partial\varphi}{\partial X_j} + S \quad (2.13)$$

in cui χ è il coefficiente di diffusione. I quattro termini dell'equazione rappresentano il termine *non stazionario*, il termine *convettivo*, il termine *diffusivo*, il termine di *sorgente*.

Questo concetto ci aiuta ad introdurre il metodo generale di soluzione usato dai codici di calcolo ai volumi finiti.

La integrazione della (2.13) su di un volume di controllo VC, mostrato in figura 2.2, dà:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial\tau} dV + \int_{VC} \frac{\partial\rho U_j \phi}{\partial X_j} dV = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial X_j} \chi \frac{\partial\phi}{\partial X_j} dV + \int_{VC} S dV \quad (2.14)$$

Applicando adesso ai termini convettivi e diffusivi il teorema della divergenza di Gauss:

$$\int_{VC} \frac{\partial\alpha_j}{X_j} dV = \int_{SC} \alpha_j \cdot n_j dA \quad (2.15)$$

dove SC è la superficie del volume di controllo (Superficie di Controllo) e \mathbf{n} il versore normale a SC; e sfruttando la proprietà della derivazione sotto il segno di integrale, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \rho \cdot \phi \cdot dV \right) + \int_{SC} \rho \cdot U_j \cdot \phi \cdot n_j \cdot dA = \int_{SC} \chi \frac{\partial\phi}{\partial X_j} \cdot n_j \cdot dA + \int_{VC} S \cdot dV \quad (2.16)$$

La (2.16) esprime il fatto che il rateo della variazione totale della quantità ϕ nel volume di controllo più il rateo netto della variazione dovuta alla convezione è eguale al rateo netto di crescita di ϕ dovuto ai processi diffusivi e alle sorgenti distribuite nel volume.

La discretizzazione in ogni volume del dominio della (2.16) è l'essenza del metodo ai volumi finiti. Le regole con cui questa avviene si possono riassumere come segue:

- Quando una faccia è in comune a due volumi di controllo adiacenti, il flusso che la attraversa deve essere rappresentato dalle medesima espressione nelle equazioni discretizzate per i due volumi.
- I coefficiente delle equazioni discretizzate devono essere positivi.
- Se il termine sorgente è linearizzato ($S=S_U+S_P\phi$), S_P deve sempre essere negativo.
- Se $S_P=0$, il coefficiente di ϕ nella equazione discretizzata per il nodo generico P deve esse la somma dei coefficienti dei termini vicini: $a_P = \sum_{nb} a_{nb}$.

Adesso si può passare alla discretizzazione di ogni termine. Per semplicità ci si riferirà al sistema mono dimensionale in figura 2.3, dove i punti E e W sono i punti di griglia vicini a P (West-East) mentre w ed e sono i due punti rappresentativi del contorno del volume di controllo attorno a P.

Discretizzazione del termine diffusivo

Per il volume di controllo mostrato in figura 2.2 i termini diffusivi della (2.16) si possono discretizzare come segue:

$$\int_{SC} \chi \frac{\partial\phi}{\partial X_j} \cdot n_j \cdot dA \approx \left[\chi \frac{\partial\phi}{\partial X_j} \cdot n_j \right]_e + \left[\chi \frac{\partial\phi}{\partial X_j} \cdot n_j \right]_w \quad (2.17)$$

Il problema si riduce allora a valutare il gradienti e la proprietà χ nei punti w ed e che non sono punti di griglia, ma punti intermedi. Per quanto riguarda il gradiente si può assumere che ϕ abbia un profilo lineare tra i punti P ed E, P e W; ne segue che:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_e = \frac{(\phi_E - \phi_P)}{(\Delta X_{e1} + \Delta X_{e2})},$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_w = \frac{(\phi_P - \phi_W)}{(\Delta X_{w1} + \Delta X_{w2})}.$$

mentre la proprietà χ si può valutare in e (w) per interpolazione lineare fra P ed E (P e W).

Discretizzazione del termine convettivo

Sempre prendendo come riferimento il volume di controllo in figura 2.2 il termine convettivo della (2.16) si può esprimere come:

$$\int_{SC} \rho \cdot U_j \cdot \phi \cdot n_j \cdot dA = \left[\rho \cdot U_i \cdot \phi \cdot n_j \right]_e + \left[\rho \cdot U_j \cdot \phi \cdot n_j \right]_w \quad (2.18)$$

Se si assume noto il campo di velocità U_i il problema principale è quello di valutare la variabile ϕ nei punti w ed e. La scelta più semplice è assumere una variazione lineare tra i punti di griglia. Questa ipotesi dà luogo al così detto *schema alle differenze centrali*. È noto che per un problema diffusivo monodimensionale senza sorgente la soluzione è lineare, ma si può dimostrare che quando è presente anche la convezione non è più così (si veda appresso).

Quindi lo schema alle differenze centrali è fisicamente corretto solamente quando la diffusione è dominante. Si può introdurre un *numero di Peclet di cella* definito come:

$$Pe = \frac{\rho \cdot U}{\chi \cdot \Delta X}, \quad (2.19)$$

che è funzione sia dei parametri fisici (attraverso ρ , U , χ) che di quelli numerici (attraverso ΔX).

Per bassi numeri di Peclet di cella è prevalente la diffusione. Si dimostra [Patankar,1980] che per numeri di Peclet di cella maggiori di 2 lo schema alla differenze centrali porta ad instabilità numeriche e non può essere usato, almeno nei casi stazionari monodimensionali qui considerati, mentre per bassi Pe esso si dimostra il più accurato.

Tuttavia varie esperienze numeriche hanno mostrato che, per i problemi reali (bidimensionali, transitori ed in presenza di termini di sorgente) studiati nel presente lavoro, lo schema alle differenze centrali è stabile per tutte le griglie provate e ai diversi Gr .

Tuttavia, per i problemi stazionari (ad esempio le simulazioni basate su modelli di turbolenza) con $Pe > 2$ si è dimostrato necessario un altro metodo che sia più stabile in tali condizioni e al tempo stesso sufficientemente accurato.

La soluzione per un problema monodimensionale diffusivo-convettivo è:

$$\frac{\varphi - \varphi_P}{\varphi_E - \varphi_P} = \frac{\exp\left(\frac{Pe \cdot X}{\Delta X}\right) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (2.20)$$

Si potrebbe pensare di costruire uno schema che utilizzi direttamente la soluzione generale, ma si deve tenere conto anche dei tempi di calcolo che sarebbero eccessivi a causa della presenza dei fattori esponenziali.

È da notare che per Pe molto grande il profilo tende a divenire piatto e ad assumere il valore del punto *upwind* (punto P se $U \geq 0$ e punto E se $U < 0$), perciò si può assumere $\varphi_e = \varphi_P$ oppure $\varphi_e = \varphi_E$ a seconda del segno della velocità: questa è l'essenza dello *schema Upwind*. Questo naturalmente è da usare per problemi dominati dalla convezione, cioè per numeri di Peclet di cella maggiori di 2.

Si può utilizzare un modello ibrido che applichi l'uno o l'altro degli schemi descritti a seconda del numero di Peclet della cella considerata (maggiore o minore di 2).

Per problemi in cui siano presenti sia la convezione che la diffusione una alternativa ai metodi *upwind* e ibrido sono gli schemi *upwind* di ordine superiore, che garantiscono una maggiore accuratezza preservando al tempo stesso la stabilità numerica. Nel presente lavoro, sempre limitatamente a problemi stazionari (modelli di turbolenza), si è scelto fra questi lo schema QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) di Leonard [1979]. Questo assume per la generica variabile φ un profilo quadratico basato su due valori nel lato *upstream* ed uno nella cella di riferimento P, come mostrato in figura 2.4.

Non linearità e accoppiamento pressione-velocità.

Applicando i concetti dei precedenti paragrafi e supponendo per il momento, per semplicità di trovarci

in condizioni stazionarie $\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \rho \cdot \varphi \cdot dV \right) = 0$, è possibile scrivere l'equazione discretizzata riferita al punto di griglia P per la variabile φ in forma generalizzata:

$$a_P \cdot \varphi_P = \sum_{nb} (a_{nb} \cdot \varphi_{nb}) + b, \quad (2.21)$$

dove il pedice nb sta ad indicare che la sommatoria è estesa a tutti i punti accanto a P.

L'espressione dei coefficienti a_p , a_{nb} , b dipende dallo schema scelto. È possibile scrivere un'equazione del tipo della (2.21) per ogni punto della griglia, includendo le condizioni al contorno nei punti al bordo. Quindi si avranno per un sistema con N punti di griglia N equazioni nelle incognite φ_i , che possono essere risolte con metodi iterativi.

Si deve ricordare, però, che la equazione di trasporto (2.16) non è, in generale, lineare poiché:

- a) le proprietà fisiche possono dipendere da φ se questa variabile rappresenta la temperatura o un altro scalare;

- b) per la i -esima equazione della quantità di moto, $\varphi=U_i$, quindi la non linearità è associata al termine convettivo. Di conseguenza i coefficienti a_p , a_{nb} , b sono funzioni dei valori φ_i di φ nei punti di griglia, e l'equazione (2.21) è *solo formalmente* lineare.

Varie tecniche iterative sono state proposte per risolvere la summenzionata non linearità. All'interno del codice da noi usato si utilizza la famiglia degli algoritmi SIMPLE.

Per una sommaria illustrazione di tale algoritmo bisogna fare un passo indietro tornando alle equazioni di Navier-Stokes e di continuità (2.1)-(2.2). In esse, le quattro incognite sono le tre componenti del vettore velocità V e la pressione P . Se la generica equazione della quantità di moto rappresenta il trasporto della corrispondente componente v_i , l'equazione della continuità non rappresenta il trasporto della pressione ma impone una condizione alle stesse componenti di velocità v_i . Il corretto campo di pressione è quello che, usato nelle equazioni di Navier-Stokes (2.2), dà un campo di velocità che soddisfa la continuità (2.1). Questa circostanza è molto scomoda in quanto i metodi sopra sviluppati per le equazioni di trasporto non sono applicabili all'equazione di continuità.

Per questa ragione, sono stati sviluppati differenti algoritmi per trasformare l'equazione di continuità in un'equazione per la pressione. Uno dei primi e più noti è il così detto algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) [Patankar e Spalding, 1972]. Altri metodi sono stati sviluppati a partire dalle assunzioni del SIMPLE quali il SIMPLER (SIMPLE Revised) [Patankar, 1980] e il SIMPLEC (SIMPLE Consistent) [Van Doormal e Raithby, 1984]

Per il presente lavoro, nelle simulazioni bidimensionali dirette si è utilizzata la tecnica ai volumi finiti basata sull'algoritmo SIMPLEC di accoppiamento velocità-pressione, con discretizzazione temporale di Crank-Nicolson e discretizzazione centrale per i termini diffusivi e convettivi. Ad ogni passo temporale, l'algoritmo SIMPLEC è stato iterato sino a quando i residui di massa, quantità di moto ed entalpia non esibivano più alcuna diminuzione ulteriore; ciò ha richiesto tipicamente da 50 a 70 iterazioni per passo temporale.

Senza alcuna parallelizzazione (non prevista dal programma di calcolo utilizzato), una simulazione ha richiesto tipicamente 0.3 s per iterazione, o 20 s per passo temporale (con una griglia di calcolo di 128×128 nodi) usando un processore INTEL Core2-Quad a 2.33 GHz. Il tempo totale di simulazione è quindi andato da ~5 a ~50 ore per completare da 10^3 a 10^4 passi temporali. Sono state complessivamente condotte oltre 25 simulazioni distinte.

2.6 Requisiti di accuratezza

Come si vedrà in seguito al variare di Gr e AR si sono ottenuti campi di moto stazionari, periodici o caotici. Nel primo caso le simulazioni sono state portate avanti fino a quando non si sono più avute variazioni significative nelle grandezze dei punti di monitoraggio. Questo ha richiesto

approssimativamente $0.2 \div 2$ costanti di tempo conduttive $\tau_H = D^2/\alpha$ corrispondenti ad una durata adimensionale che aumenta da ~ 1 per $Gr \approx 10^5$ (il più piccolo numero di Grashof simulato) a ~ 10 per $Gr \approx 10^9$ (il più alto numero di Grashof per il quale si ha moto stazionario). Nei casi dipendenti dal tempo, come sarà mostrato in seguito, il moto mostra un periodo dominante che va da ~ 0.4 in unità τ_0 (caso $AR=1$, $Gr \approx 5.4 \cdot 10^7$) a ~ 6 unità τ_0 (caso $AR=4$, $Gr=1.26 \cdot 10^9$). Le simulazioni sono state protrate al fine di includere più periodi che consentissero una verifica della perfetta periodicità o una buona statistica nei casi non periodici, fino a un tempo massimo t_{max} da ~ 10 a ~ 50 .

Nel caso di moto caotico (che è stato ottenuto per $Gr \geq 10^6$ per $AR=4$, $Gr \geq 10^8$ per $AR=1$ e $Gr \geq 3 \cdot 10^{10}$ per $AR=0.25$), un criterio per la scelta della griglia di calcolo è che tutte le strutture rilevanti del moto dipendenti dal tempo (“eddies”) siano correttamente risolte. Ciò implica che la grandezza della cella Δ sia dello stesso ordine della scala di Kolmogorov Λ_K dei vortici dissipativi. Questa può essere espressa [Lèsieur, 1990] come:

$$\Lambda_K = (v^3/\varepsilon)^{1/4} \quad (2.22)$$

nella quale ε è il rateo di dissipazione dell’energia turbolenta per unità di massa (p.u.m.). Il rateo totale di dissipazione p.u.m. dell’energia meccanica nella cavità può essere stimato dal prodotto dell’accelerazione associata alla forza di galleggiamento, $\sim g\beta\vartheta_c$, per la velocità caratteristica del fluido, $\sim U_0 = D/\tau_0$. Nel moto pienamente caotico, la maggior parte della dissipazione avviene attraverso una cascata di strutture turbolente, così che, si può scrivere:

$$\varepsilon \approx g\beta\vartheta_c D/\tau_0 \quad (2.23)$$

Sostituendo la equazione (2.23) per ε nell’equazione (2.22) e tenendo conto delle definizioni di ϑ_c , Gr e τ_0 , si ottiene la seguente stima della scala di dissipazione adimensionale $\lambda_K = \Lambda_K/D$:

$$\lambda_K \approx (32\pi\sqrt{2})^{1/4} Gr^{-3/8} \quad (2.24)$$

Questa può essere usata per avere una stima della massima accettabile grandezza adimensionale delle celle $\delta_s = \Delta/D$. Per esempio, l’equazione (2.24) dà $\lambda_K \approx 0.02$ per $Gr=10^6$ e $\lambda_K \approx 0.004$ per $Gr=10^8$, suggerendo ad esempio, per un fattore di forma pari a 4, che occorrono $\sim 50 \times 200$ celle nel primo caso e $\sim 250 \times 1000$ celle nel secondo.

Ovviamente la scala dissipativa delle strutture termiche è più grande della precedente scala delle strutture meccaniche poiché può essere espressa come $\Lambda_\vartheta = Pr^{-3/4} \Lambda_K$ (quindi $\Lambda_\vartheta \approx 13 \Lambda_K$ per il presente numero di Prandtl pari a 0.0321).

Per ciò che riguarda il passo temporale, il metodo implicito (Crank-Nicholson) adottato per la discretizzazione temporale nelle presenti simulazioni non impone problemi di stabilità. Comunque, nelle simulazioni di moto caotico, la scala temporale dei vortici dissipativi (Kolmogorov) deve essere risolta. Adottando l’ipotesi di Taylor di “turbolenza congelata” (frozen turbulence) e ricordando che la

tipica velocità adimensionale è dell'ordine dell'unità, i limiti sul passo temporale δt possono considerarsi formalmente identici a quelli visti per la risoluzione spaziale della dimensione maglia δs , espressa dalla equazione (2.24). Perciò si può scrivere:

$$\delta t \approx \delta s \approx \lambda_K \quad (2.25)$$

Sebbene l'ipotesi di "turbolenza congelata" sia poco applicabile, a rigore, al presente caso di convezione confinata, essa è tuttavia coerente con la rappresentazione euleriana sottostante alla descrizione matematica del problema. Ovviamente, i criteri espressi dalla equazione (2.24) e dalla (2.25) perdono significato al di fuori del campo in cui il sistema manifesta un comportamento caotico.

Sfortunatamente, osservare strettamente i criteri sopra descritti pone eccessivi problemi da un punto di vista computazionale. Le griglie usate nel presente studio hanno al massimo 128×220 nodi ($AR=4$). Poiché i maggiori gradienti si hanno in prossimità della parete, per avere una maggiore risoluzione degli strati limite le griglie sono rese più fini in tali regioni usando o una progressione geometrica con $\Delta_{max}/\Delta_{min}=60$ (per $AR=4$ e le simulazioni con modelli di turbolenza) o una distribuzione a tangente iperbolica (per i restanti casi).

Per ciò che riguarda il passo temporale, nella maggior parte dei casi esso varia tra 10^{-3} e $4 \cdot 10^{-3}$ (in forma adimensionale), così che, nel caso di un moto non stazionario, un periodo principale ($0.4 \div 6\tau_0$) sia risolto da alcune centinaia di passi temporali. In tutti i casi sono state adottate le condizioni iniziali "naturalì" $u=v=T=0$; nessun disturbo esterno è stato esplicitamente sovrapposto sul campo di moto o su quello termico, così che, nei casi in cui si è avuta una rottura di simmetria spaziale o una rottura dell'equilibrio stazionario, queste sono state dovute solamente alla crescita di piccoli errori numerici pseudo-casuali nella soluzione.

2.7 Spettri

Molti dei risultati verranno presentati nella forma di serie temporali delle quantità valutate nei punti di monitoraggio o di interi campi della funzione di corrente, della temperatura o di altre quantità derivate. Oltre a ciò, può essere calcolata la densità spettrale euleriana nel generico punto P per la quantità $\phi(t)$ come:

$$P_{\phi\phi}(f) = \left| \int_{t_{min}}^{t_{max}} \phi(t) \cdot e^{2\pi i f t} dt \right|^2 \quad (2.26)$$

L'algoritmo della Trasformata Veloce di Fourier (Fast Fourier Transform) è stato usato per valutare $P_{\phi\phi}$. In corrispondenza, lo spettro inizia da una frequenza minima $f_{min}=(t_{max}-t_{min})^{-1}$, e include valori solamente a frequenze multiple di f_{min} , fino ad un massimo valore $f_{max}=(2\delta t)^{-1}$. E' da notare che il rapporto $f_{max}/f_{min}=(t_{max}-t_{min})/(2\delta t)$ è pari alla metà del numero dei dati contenuti nella serie temporale analizzata (tipicamente $\sim 10^4$ nelle presenti simulazioni).

2.8 Validazione del metodo per cavità scaldata differenzialmente

Prima di affrontare i problemi di convezione naturale a basso numero di Prandtl e con generazione interna di potenza che sono l'oggetto principale del presente lavoro, si è condotta una validazione preliminare del metodo e del codice usati simulando una cavità scaldata differenzialmente con aria ($Pr \sim 0.71$) come fluido di lavoro, problema ampiamente studiato e ben documentato in letteratura.

La cavità scelta ha fattore di forma 1, è sottoposta a un salto termico ΔT tra le due pareti verticali e ha le pareti orizzontali adiabatiche. Per questo problema si usa come definizione del numero di Grashof: $Gr = g\beta H^3 \Delta T / \nu^2 = Ra / Pr$.

Per uniformità con precedenti lavori presentati in letteratura, la scala dei tempi usata è stata:

$$\tau_{ref} = \frac{H^2}{\nu \sqrt{Gr}} = \frac{\tau_0}{4\pi\sqrt{2}} \quad (2.27)$$

Si sono confrontati i risultati ottenuti per due numeri di Rayleigh: $Ra = 10^8$ (moto laminare stazionario) e $Ra = 2 \cdot 10^8$ (moto periodico) con quelli presentati da diversi autori. Il primo caso è stato studiato da Nobile [1996], usando un metodo multi-grid a correzione additiva e da Le Quéré [1991] usando un metodo spettrale basato sull'espansione in polinomi di Chebyshev. Il secondo caso è stato studiato ancora da Nobile [1996], da Janssen [1994], che ha usato uno schema alle differenze finite del secondo ordine, e da Janssen ed Henkes [1993] che hanno usato uno schema alle differenze finite del quarto ordine con una griglia molto fine (360×360). La griglia usata nel presente lavoro ha 128×128 nodi con un addensamento alla parete simile a quello usato da Nobile [1996].

La tabella 2.2 mostra i risultati dello studio per il caso stazionario ($Ra = 10^8$). Si nota che, a meno della significativa differenza nella valutazione della massima velocità orizzontale a metà altezza rispetto ai risultati di Le Quéré ($\sim 8.1\%$), per altro ottenuta anche da Nobile [1996] e da Janssen ed Henkes [1993], i nostri risultati sono in ottimo accordo con quelli degli altri autori, con scarti minori dell'uno per cento.

Risultati	Nobile	Le Quéré	Presente lavoro	scarto% rispetto Nobile	scarto% rispetto Le Quéré	scarto% Nobile rispetto Le Quéré
$U_{\max}(1/2,y)$	0.036	0.0382	0.0351	-2.50	-8.12	-5.76
y di U_{\max}	0.9277	0.928	0.9295	0.19	0.16	-0.03
$V_{\max}(x,1/2)$	0.2641	0.2637	0.2636	-0.19	-0.04	0.15
x di V_{\max}	0.0121	0.012	0.0124	2.48	3.33	0.83
Nu_{\max}	87.88	87.24	88.064	0.21	0.94	0.73
y di Nu_{\max}	0.0077	0.008	0.00798	3.64	-0.25	-3.75
Nu_{\min}	1.9176	1.9191	1.93	0.65	0.57	-0.08
y di Nu_{\min}	0.99959	1	0.99936	-0.02	-0.06	-0.04
Nu medio	30.237	30.225	30.396	0.53	0.57	0.04

Tabella 2.2

Confronto dei risultati per $AR=1$, $Pr=0.71$, $Ra=2 \cdot 10^8$ (moto stazionario).

Anche per quanto riguarda il caso periodico ($Ra=2 \cdot 10^8$) si ottengono risultati soddisfacenti: la frequenza adimensionale periodica prevista dalle presenti simulazioni è 0.04965 contro i valori di 0.0458 [Nobile, 1996], 0.0463 [Janssen, 1994] e 0.0527 [Janssen e Henkes, 1993], in ottimo accordo con i risultati presumibilmente più accurati fra quelli esaminati (griglia 360×360).

2.9 Studio di “grid independence”

Passando ora al problema della convezione naturale a basso Pr e in presenza di generazione interna di potenza, prima di cominciare il vero e proprio studio si sono effettuate delle simulazioni preliminari per verificare l’influenza del numero di nodi della griglia sulla soluzione finale del campo di moto e di temperatura.

Le simulazioni sono state effettuate per due diversi numeri di Grashof ($Gr=10^7$, moto laminare stazionario e $Gr=10^8$, moto caotico) nella cavità con fattore di forma unitario.

Per il primo caso si sono condotti due confronti: uno fra due griglie con diverse leggi di addensamento alla parete, rispettivamente a progressione geometrica e a tangente iperbolica, ma con eguale numero di nodi (64×64), l’altro scegliendo la legge di addensamento a tangente iperbolica ma facendo variare il numero di nodi: 50×50 , 64×64 , 80×80 , 128×128 .

Come si vede in figura 2.5 (a), nel primo confronto si nota che il campo di moto ottenuto con griglia con addensamento a serie geometrica risulta più irregolare rispetto quello ottenuto con addensamento a tangente iperbolica.

Per quanto riguarda il secondo confronto, la figura 2.6 mostra la velocità verticale (a) e la temperatura (b) in mezzera. Si nota che la velocità verticale è ben simulata già con la griglia 80×80 e che l'ulteriore aumento del numero di nodi non comporta una significativa variazione. Continuano ad esservi invece delle piccole differenze tra i risultati delle due griglie più fini per quanto riguarda la temperatura.

Nel caso $Gr=10^8$, invece, a causa dei notevoli tempi di calcolo, ci si è limitati a condurre due sole simulazioni: una usando la griglia con addensamento a progressione geometrica e un numero di nodi pari a 64×64 , l'altra usando l'addensamento a tangente iperbolica e un numero di nodi pari a 80×80 .

In figura 2.5 (b) sono riportati i due campi di moto mediati nel tempo. Si nota una notevole differenza tra i due risultati. Questa è ancor più evidente in figura 2.7 dove è riportata la velocità verticale nei punti di monitoraggio P1 e P4; si vede come la griglia grossolana si comporti da filtro "passa basso" per le alte frequenze presenti nelle grandezze benché, a grandi linee, preveda correttamente il comportamento medio.

Il risultato fondamentale di questi studi è stato quello di preferire la griglia con addensamento a tangente iperbolica nei casi a fattore di forma 1 e 0.25. Si noti del resto che, contrariamente a ciò che avviene nelle cavità differenzialmente scaldate (dove il nucleo centrale della cavità non è sostanzialmente interessato dalla circolazione), nella cavità con generazione interna di potenza tutto il fluido è interessato dal moto; è preferibile quindi il suddetto addensamento che produce una griglia un po' più fine sia nella regione centrale che presso le pareti sia pure a scapito della regione intermedia tra il core e lo strato limite (figura 2.8).

3. Risultati per $AR=4$

Le prime simulazioni condotte hanno riguardato il caso di una cavità snella ($AR=4$) avente le pareti superiore ed inferiore adiabatiche e quelle laterali isoterme (si veda la figura 2.1 per la geometria e la notazione). Lo studio ha riguardato numeri di Grashof, basati sulla massima temperatura conduttiva e sulla larghezza della cavità, da $\sim 3.8 \cdot 10^4$ a $\sim 1.26 \cdot 10^9$. Per Gr fino a $\sim 3 \cdot 10^5$ si sono ottenute soluzioni simmetriche stazionarie. Per Gr compreso fra $\sim 3 \cdot 10^5$ e $\sim 10^6$ si è osservato un comportamento periodico. La destabilizzazione della soluzione stazionaria è causata dalla crescita di una instabilità asimmetrica della colonna centrale ascendente, che scende attraverso la cavità, come predetto dalla teoria di stabilità lineare per cavità allungate (si veda il §2.4). Per $Gr > \sim 10^6$ il comportamento perfettamente periodico si perde e si ottiene un comportamento caotico. Nei casi stazionari il coefficiente d'attrito è molto vicino a quello predetto dall'assunzione di moto parallelo ($4\pi^2/15$), mentre nel campo caotico questo diminuisce con $\sim Gr^{-1/3}$. Il numero di Nusselt cresce con $Gr^{1/6}$.

3.1 Moto stazionario

Il moto presenta soluzioni stazionarie per $Gr \leq \sim 3 \times 10^5$. Il comportamento di alcune grandezze durante il transitorio iniziale è mostrato in figura 3.1 per i tre più bassi numeri di Grashof simulati ($Gr \approx 3.79 \times 10^4$, 1.26×10^5 e 2.19×10^5).

La figura 3.1(a) riporta le temperature massima e media in funzione del tempo. Il rateo iniziale di salita della temperatura adiabatica nella cavità è identico per ogni punto, ed è dato in termini adimensionali da $\partial T / \partial t|_{\text{init}} = 32\pi\sqrt{2} / (Pr\sqrt{Gr})$, come può essere dedotto dall'equazione (2.6) che, nel caso di convezione e diffusione trascurabili, si riduce a un semplice bilancio fra inerzia termica e generazione di calore. Pertanto, nella forma adimensionale qui usata, il rateo di crescita iniziale della temperatura decresce al crescere del numero di Grashof.

La figura 3.1(b) mostra la velocità verticale v in due dei punti di monitoraggio indicati in figura 2.1 (P1 e P4) in funzione del tempo. L'aumento (adimensionale) di v_1 con Gr è dovuto alle stesse ragioni viste precedentemente in relazione alla soluzione asintotica per cavità snella, §2.3. E' da notare che l'evoluzione temporale delle velocità continua fino a $t \approx 1$, mentre, a causa del piccolo valore del numero di Prandtl, le temperature raggiungono il loro valore stazionario molto più rapidamente ($t \approx 0.5$).

Le soluzioni numeriche stazionarie sono paragonate con quelle ottenute per moto parallelo in figura 3.2. I profili di velocità verticali v (a) e di temperatura T (b) a metà altezza della cavità ($y=0$) sono confrontati con il profilo analitico dato dalle equazioni (2.9a) e (2.9b). La velocità adimensionale v è stata ulteriormente divisa per $\pi(2/Gr)^{1/2}$ al fine di eliminare molta della dipendenza dei risultati dal

numero di Grashof. Si può osservare che la soluzione numerica si allontana progressivamente da quella analitica al crescere di Gr ma è ancora vicina a questa anche ai valori più alti del numero di Grashof per i quali si ha ancora moto stazionario. Il profilo di temperatura coincide praticamente con quello della soluzione puramente conduttiva per tutti i casi stazionari.

La figura 3.3 riporta la funzione di corrente ed i campi di temperatura per i tre casi. La funzione di corrente è adimensionalizzata rispetto a $DU_0=D^2/\tau_0$. Vi è una sola cella di circolazione in ciascuna metà della cavità, con una perfetta simmetria bilaterale destra-sinistra ed una approssimativa simmetria alto-basso. I campi di temperatura sono solo leggermente diversi rispetto alla soluzione monodimensionale puramente conduttiva. La corrente ascendente a cavallo della linea centrale della cavità fornisce un trasporto convettivo di fluido caldo dal basso verso l'alto, causando un aumento di temperatura nella zona centrale della parte alta della cavità che è più marcato a più alti Gr , come si può vedere dai valori asintotici di T_{max} in figura 3.1(a). Questo trasporto verticale elimina la simmetria alto-basso presente nella soluzione puramente conduttiva.

L'effetto della convezione è soltanto quello di cambiare la distribuzione di temperatura senza alterarne significativamente la media che rimane prossima al suo valore conduttivo $\langle T \rangle = 2/3$ (in termini adimensionali)*. In altri termini, per il basso numero di Prandtl qui considerato, il contributo della convezione allo scambio termico globale è trascurabile fino a $Gr \approx 3 \cdot 10^5$. Come si vedrà in seguito, può accadere che la temperatura media sia leggermente maggiore del valore conduttivo, come già osservato da altri autori in passato per alti valori del numero di Prandtl [De Socio *et al.*, 1979].

3.2 Moto periodico

Per numeri di Grashof compresi approssimativamente tra $3 \cdot 10^5$ e 10^6 si sono ottenute soluzioni perfettamente periodiche. Come si è visto nel paragrafo 2.4, l'analisi di stabilità lineare applicata a uno strato verticale (cavità con $AR \rightarrow \infty$), fornisce, per il valore di Pr qui studiato, un valore critico del numero di Grashof $Gr_c \approx 1.1 \cdot 10^5$. Questo valore è abbastanza vicino a quello, un po' più piccolo, ricavato dalla simulazione numerica ($Gr_c \approx 3 \cdot 10^5$); ciò può essere spiegato dal fatto che le presenti simulazioni si riferiscono ad una cavità di fattore di forma finito ($AR=4$), nella quale alcune lunghezze d'onda instabili sono inibite e non si possono propagare, con il risultato di una transizione ritardata.

E' da notare che questo intervallo di Gr è simile a quello in cui May [1991] ottenne soluzioni periodiche ($4.5 \cdot 10^5 \div 1.35 \cdot 10^6$), nonostante la considerabile differenza di numero di Prandtl (7), fattore di forma ($AR=1$) e condizioni al contorno termiche (tutte e quattro le pareti isoterme).

Sono state effettuate due simulazioni nel campo periodico: $Gr=3.79 \cdot 10^5$ e $Gr=7.03 \cdot 10^5$. La figura

* Da qui in avanti, le parentesi $\langle \bullet \rangle$ saranno usate per denotare le medie spaziali mentre le medie temporali saranno denotate con il simbolo $\bar{\bullet}$

3.4 mostra il comportamento delle temperature massima e media in funzione del tempo per il caso a numero di Grashof minore. Per lo stesso caso, la figura 3.5 riporta l'andamento temporale della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) in alcuni dei punti di monitoraggio indicati in figura 2.1. I punti P1-P2 e P3-P5 sono disposti simmetricamente rispetto alla mezzeria; i primi si trovano nella parte bassa della cavità, viceversa, i secondi, in quella superiore.

La prima caratteristica degna di nota della figura 3.5 è che dopo ~ 3 unità temporali, la soluzione simmetrica si rompe mentre le instabilità crescono, e gli andamenti temporali delle grandezze relativi a punti geometricamente simmetrici cominciano a differire. La rottura di simmetria del campo istantaneo di moto avviene contemporaneamente sia nella parte superiore che in quella inferiore della cavità (punti P1-P2, P3-P5). A seguito della rottura di simmetria si osserva una diminuzione del massimo della temperatura (figura 3.4, ottenuta per un tempo adimensionale $t \approx 3$). A partire da circa 10 unità temporali, le grandezze nei punti di monitoraggio mostrano un chiaro andamento periodico, con periodo pari a 4.7 unità temporali. I punti che sono simmetrici rispetto la mezzeria della cavità (P1-P2 e P3-P5) esibiscono lo stesso comportamento, ma sfasato nel tempo di mezzo periodo. Si noti (figura 3.4) che il periodo delle temperature massima e media è la metà del periodo reale della soluzione; il motivo è che il punto in cui si ha la massima temperatura si sposta nel tempo a cavallo della mezzeria due volte in un periodo, e la temperatura media non è ovviamente influenzata dalla parità della soluzione.

La figura 3.6 mostra la funzione di corrente istantanea (a) e le isoterme (b) per lo stesso numero di Grashof ($3.79 \cdot 10^5$) durante il transitorio iniziale. L'intervallo tra due grafici consecutivi è ~ 0.63 in unità adimensionali. La figura mostra chiaramente che la rottura della soluzione stazionaria simmetrica avviene per $t \approx 3.5$ (tra la quinta e la sesta istantanea), dopo che si è raggiunto un regime pseudo-stazionario, ed è dovuta alla crescita di oscillazioni laterali di lunghezza d'onda $\lambda \approx D$ nella colonna ascendente, che conduce alla comparsa di rulli di ricircolazione discendenti sfalsati.

L'instabilità può essere interpretata come la crescita di una perturbazione asimmetrica della velocità verticale che si propaga verso il basso come una onda viaggiante avente un numero d'onda adimensionale ≈ 1 e una velocità adimensionale ≈ 0.2 . L'analisi di stabilità lineare condotta per fattore di forma infinito (moto parallelo) da Gershuni *et al.* – come riportato da Kulacki e Richards [1985] – fornisce un numero di Grashof critico di $\sim 1 \cdot 10^5$ per la crescita di una perturbazione a onda viaggiante antisimmetrica a numeri di Prandtl comparabili con quello del presente studio. Il numero d'onda e la velocità associati sono ~ 0.65 e ~ 0.28 rispettivamente, nella presente formulazione adimensionale. I valori lievemente superiori osservati nel presente studio sia per il numero di Grashof critico ($\sim 3 \cdot 10^5$) che per il numero d'onda (~ 1) possono essere spiegati con l'altezza finita della cavità; in più, la teoria della stabilità lineare studia la stabilità incipiente, mentre le simulazioni numeriche riguardano il risultante moto sviluppato. Si deve notare che la frequenza adimensionale della perturbazione è molto vicino a quella predetta dalla teoria di stabilità lineare per AR infinito (~ 0.2).

La figura 3.7 mostra una sequenza temporale della funzione di corrente istantanea (a) e della temperatura (b) durante un periodo, dopo che si è raggiunto il moto periodico (da $t \approx 15.7$ a 20.1, intervallo tra i grafici ~ 0.63). Si rileva dai grafici relativi alla funzione di corrente una struttura istantanea asimmetrica multicellulare (a), con almeno tre rulli convettivi per ciascun lato della cavità. Questi sono disposti alternativamente a mo' di scacchiera ai due lati della colonna centrale ascendente. Nel campo istantaneo di temperatura (b) si nota ancora la forma tortuosa delle isoterme; tuttavia, rispetto alla forma delle linee di corrente nei grafici (a), l'ampiezza delle oscillazioni laterali è fortemente attenuata dagli effetti conduttivi che dominano ai bassi numeri di Prandtl.

Rulli orari ed antiorari sono rispettivamente generati negli angoli superiori destro e sinistro; due treni di rulli sfalsati procedono verso il basso attraverso la cavità e smorzano la loro energia attraverso la dissipazione viscosa una volta che giungono alla parete inferiore. Il periodo t_p , dopo il quale il campo di moto si ripete identicamente, coincide con il tempo di rinnovo dei rulli e corrisponde al tempo necessario per formare un paio di rulli (orario/antiorario). La vita di un singolo rullo è di circa $3t_p$, poiché in media tre paia di rulli sono presenti nella cavità. In ogni periodo le metà sinistra e destra della cavità presentano le stesse fasi, ma con uno sfasamento temporale di mezzo periodo, come si è osservato in precedenza discutendo il comportamento temporale delle grandezze nei punti di monitoraggio.

Una simile evoluzione può essere osservata per una cavità verticale con fattore di forma infinito se al profilo base di velocità (2.9a) si somma una perturbazione a onda viaggiante del tipo:

$$v(x, y, t) = A \sin(2\pi x) \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y - \gamma t)\right] \quad (3.1)$$

Nell'equazione (3.1), A è l'ampiezza della perturbazione sviluppata (dell'ordine dell'unità in forma adimensionale), mentre λ e γ sono rispettivamente la sua lunghezza d'onda e la sua velocità di propagazione, entrambe adimensionali. Un confronto fra tale moto risultante e un'istantanea della soluzione numerica a rulli sfalsati è mostrato in figura 3.8 per $A=2$, $\lambda=1$.

Esempi di spettri della velocità e della temperatura per differenti punti di monitoraggio sono dati in figura 3.9. Gli spettri sono normalizzati in modo che il loro integrale sia uno. Essi mostrano dei picchi marcatamente separati, corrispondenti a frequenze discrete in accordo con la natura periodica del moto. Il picco più alto si ha per la frequenza principale f_p del periodo, mentre tutti i massimi secondari corrispondono alle sue armoniche superiori, in relazione alla forma del segnale. La frequenza più alta che abbia ancora un significativo contenuto di energia ($\geq 10^{-3}$ volte il picco principale), è $\sim 5f_p$ sia per la velocità che per la temperatura.

Dal paragone tra le sequenze temporali relative alle velocità verticali nei punti P1 e P4 nella figura 3.5(a), come pure dai corrispondenti spettri in figura 3.9(a,b), risulta chiaro che l'ampiezza relativa della prima armonica ($2f_p$), associata allo sbandieramento della colonna centrale ascendente, è abbastanza significativa nel punto 4, che si trova vicino alla mezzeria, mentre è marginale nel punto 1,

vicino alla parete sinistra. Questo è un esempio di una proprietà più generale della dipendenza temporale del moto nella presente configurazione; il moto nei punti vicini alla mezzeria è affetto sia dal transito di rulli orari che antiorari e quindi esibisce fluttuazioni significative a frequenza doppia della frequenza principale f_p , mentre, nei punti di monitoraggio lontani dalla mezzeria, la frequenza $2f_p$ gioca un ruolo minore. Simili osservazioni possono essere fatte per le sequenze e gli spettri della temperatura per i punti P1-P4, figure 3.5(b) e 3.9(c,d).

3.3 Transizione al comportamento caotico

Il regime periodico esiste solamente in un campo ristretto del numero di Grashof. Infatti, per valori di Gr maggiori di $\sim 10^6$, la periodicità perfetta viene sostituita da un comportamento irregolare. Ciò è mostrato nella figura 3.10 che riporta, per $Gr=1.26 \cdot 10^6$, l'andamento delle velocità (a) e delle temperature (b) nei punti di monitoraggio P1 e P2 in funzione del tempo per tutta la durata della simulazione. È abbastanza evidente una periodicità approssimata, sebbene siano presenti molte irregolarità. Al contrario dei casi precedenti, le curve relative ai punti simmetrici non sono identiche e traslate di mezzo periodo, ma, piuttosto, esibiscono una forma completamente differente. Il periodo principale che può essere identificato nella figura corrisponde ancora al tempo di rinnovo dei rulli ed è $t_p \approx 5.8$ ($f_p \approx 0.17$), quasi identico a quello osservato nel caso perfettamente periodico per $Gr=7.03 \times 10^5$. A causa del tempo di simulazione relativamente piccolo, è difficile accertare se il moto a questi numeri di Grashof sia propriamente caotico o, piuttosto, quasi periodico (il regime quasi periodico presenta due frequenze incommensurabili distinte oltre alle rispettive armoniche, ed è caratterizzato da un'orbita aperta confinata su un toro in un opportuno spazio delle fasi). Regimi quasi periodici sono stati trovati tra moto periodico e caotico in cavità scaldate differenzialmente.

La figura 3.11 mostra le sequenze temporali dei campi di moto e di temperatura per lo stesso caso $Gr=1.26 \cdot 10^6$, dopo che il transitorio iniziale è terminato. L'intervallo tra le istantanee è di 0.57 unità temporali; quindi la sequenza riportata copre circa un intero periodo principale t_p . I rulli sono generati alternativamente negli angoli superiori come nel caso periodico di figura 3.7; adesso, però, essi scendono con regolarità soltanto fino a quando raggiungono circa metà altezza della cavità, mentre, oltre questo punto, la discesa presenta eventi di coalescenza irregolari e bruschi. La coalescenza dei rulli sembra giocare un ruolo importante nel meccanismo della distruzione dei rulli stessi e della dissipazione di energia meccanica, accanto al semplice smorzamento viscoso che era il solo meccanismo presente nel caso periodico. La coalescenza dei rulli appare anche responsabile della destabilizzazione della periodicità e quindi gioca un ruolo importante nella transizione al caos. Come nei casi periodici visti precedentemente, la distribuzione di temperatura è più regolare rispetto a quella della funzione di corrente, sempre a causa del ruolo giocato dalla conduzione ai bassi numeri di Prandtl.

3.4 Moto pienamente caotico

Quando il numero di Grashof è fatto crescere oltre $\sim 2 \cdot 10^6$, il moto diviene pienamente caotico. Quattro numeri di Grashof differenti sono stati studiati in questo campo: $3.79 \cdot 10^6$, $3.79 \cdot 10^7$, $3.79 \cdot 10^8$, e $1.26 \cdot 10^9$.

La figura 3.12 mostra le temperature massima e media del fluido in funzione del tempo per i quattro casi. Si deve notare che la durata adimensionale del transitorio iniziale cresce con Gr . L'ampiezza della sovraelongazione (overshoot) che segue la salita iniziale sia della temperatura massima che di quella media decresce al crescere di Gr a causa del crescente mescolamento; non si osserva overshoot in $\langle T \rangle$ per $Gr \approx 3.79 \cdot 10^8$ o $1.26 \cdot 10^9$. Per la stessa ragione le fluttuazioni temporali più intense sia in $\langle T \rangle$ che in T_{max} si osservano ai più bassi valori di Gr ($Gr = 3.79 \cdot 10^6$ e $3.79 \cdot 10^7$).

La figura 3.13 mostra il comportamento delle velocità verticali in funzione del tempo nei punti di monitoraggio P1 (a) e P4 (b) per tutti i casi caotici. Per chiarezza sono state riportate solamente le sequenze per una durata adimensionale di ~ 6 , dopo che il transitorio iniziale è terminato. Nell'intero campo considerato, le sequenze temporali presentano chiaramente diverse frequenze distinte. Le frequenze più alte sono osservate solo per una parte del tempo (ad es. $t \approx 12-13$ per la velocità v_1 nel caso $Gr = 1.26 \cdot 10^9$), dando luogo ad un caratteristico comportamento intermittente. Questa intermittenza sembra associata alla rapida coalescenza di due rulli, come si è osservato discutendo le sequenze di istantanee dei campi di moto, ed è più evidente nella parte bassa della cavità (punto di monitoraggio P1).

La figura 3.14 riporta la temperatura in funzione del tempo negli stessi punti di monitoraggio P1 (a) e P4 (b) per i diversi casi. Le alte frequenze sono ancora presenti nel punto P1 (che si trova nella in basso a destra), ma sono quasi completamente assenti nel punto P4 (vicino alla mezzeria nella parte alta).

Gli spettri della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) sono rappresentati nella figura 3.15 per $Gr = 1.26 \cdot 10^9$ nel punto di monitoraggio P1. In tali spettri si possono definire quattro regioni:

I. Regione a bassa frequenza ($f \leq 1$): qui, particolarmente negli spettri di velocità, figura 3.15(a), le caratteristiche più rilevanti sono gli ampi picchi corrispondenti alla frequenza di rinnovo dei rulli f_p (≈ 0.3 per il caso in questione) e la sua prima armonica $2f_p$ (≈ 0.6). I picchi sono allargati, a differenza che nello spettro del caso periodico in figura 3.8, a causa della modulazione caotica della frequenza.

II. Regione intermedia ($1 \leq f \leq 10$). Questa regione corrisponde alle strutture caotiche che ancora hanno un significativo contenuto di energia ed è caratterizzata da una pendenza (indicata in figura 3.15) di circa $-5/3$, prossima al valore teorico atteso per il sub-range inerziale di Kolmogorov della turbolenza isotropa ed omogenea.

III. Regione dissipativa ($10 \leq f \leq 30-50$). Questa regione è caratterizzata da una caduta ripida del contenuto di energia delle fluttuazioni con una pendenza di ~ -6 per v e ~ -9 per T . La frequenza di

taglio adimensionale di ~ 10 può essere identificata con la frequenza di Kolmogorov $f_K \sim (\lambda_K)^{-1}$ dei vortici dissipativi, ed è molto più bassa del valore conservativo (~ 750) fornito per il presente valore di Gr ($1.26 \cdot 10^9$) dall'equazione (2.24) del §2.6 come pure dell'inverso del passo temporale (adimensionale) utilizzato (560). La corrispondente scala spaziale dissipativa di Kolmogorov è $\lambda_K \sim 1/10$, che è molto più grande della grandezza media delle celle della griglia di calcolo usata (128×220 nodi). Ciò suggerisce che tutte le scale significative sia spaziali che temporali sono adeguatamente risolte dalle presenti simulazioni. Un simile spettro per il punto P4 esibisce analoghe caratteristiche ma con frequenza di taglio inferiore (3~5).

IV. “Coda” numerica $1/f$ tra $f=30\sim 50$ e $f=f_{max}=1/(2\delta t)=280$, inevitabilmente associata con l'implementazione numerica dell'algoritmo FFT e priva di significato fisico.

La figura 3.16 riporta alcune istantanee consecutive della funzione di corrente (a) e della temperatura (b) nella fase iniziale (fino a $t \approx 4.4$) per $Gr=3.79 \cdot 10^8$. L'intervallo tra le istantanee è 0.55 unità di tempo. L'evoluzione della funzione di corrente (a) mostra che nei primi istanti, una singola cella di convezione naturale si forma in ogni metà della cavità, con una circolazione più intensa nella zona inferiore (in contrasto con la più intensa circolazione nella zona superiore ottenuta nei casi periodici, si veda ad es. la figura 3.6(a) relativa a $Gr=3.79 \cdot 10^5$). Per $t \approx 2.2$ (istantanee 4-5), due rulli controrotanti di origine idrodinamica iniziano a crescere negli angoli in basso, mentre le due celle precedenti si muovono verso l'alto. Fino a questo istante, la simmetria spaziale rispetto alla mezzeria è preservata.

Negli istanti successivi, mentre le celle di circolazione principale continuano a spostarsi in alto, appaiono tra queste strutture e i rulli contro rotanti regioni a bassa velocità (istantanea 6, $t \approx 3.3$). A questo punto si rompe la simmetria bilaterale e il moto del fluido diviene caotico. La rottura iniziale avviene quando i getti orizzontali diretti verso l'interno, che provengono dal distacco degli strati limite di parete (e che inizialmente si scontrano simmetricamente sulla mezzeria della cavità), improvvisamente si scavalcano a vicenda e si compenetrano (istantanee 6-7). Questa instabilità è caratteristica dei casi ad elevato numero di Grashof ed era assente nei casi periodici, figura 3.6(a). Comunque il meccanismo di instabilità (oscillazioni laterali del colonna ascendente) descritto per i casi precedenti è ancora anch'esso presente.

La sequenza di temperatura corrispondente è illustrata in figura 3.16(b). La crescita iniziale di una stratificazione termica e la penetrazione di fluido freddo nella regione centrale in basso caratterizza gli stadi iniziali del transitorio (istantanee 1-3). Comunque, alla stratificazione orizzontale si sovrappone progressivamente una significativa stratificazione verticale (istantanee 3-5). Si può osservare la differenza con il caso periodico in figura 3.6(b), nel quale la stratificazione verticale è trascurabile. La sequenza delle funzione di corrente e della temperatura mostra chiaramente l'onda viaggiante che scende lungo il margine dello strato limite verticale.

I rulli contro rotanti di origine idrodinamica che si formano in basso (istantanee 4-6 nella

sequenza della funzione di corrente) determinano corrispondenti regioni di stratificazione termica instabile nella parte inferiore della cavità, che pure contribuiscono al mescolamento caotico (istantanea 6 e seguenti). Nelle stesse istantanee, regioni più piccole di stratificazione termica instabile si possono osservare anche nella parte alta della cavità. Tutti i meccanismi di instabilità sembrano manifestarsi contemporaneamente per $t \approx 3.3$ (istantanea 6). Dopo l'intervallo mostrato nella figura 3.16, l'ulteriore evoluzione dei campi di moto e di temperatura è pienamente caotica.

La figura 3.17 mostra altre istantanee di funzione di corrente (a) e di temperatura (b) ben oltre la fine del transitorio. Le sequenze coprono circa 2.8 unità di tempo con un passo di ~ 0.4 . Il campo di moto, Figura 3.17a, mostra la ripetuta nascita, discesa, coalescenza e distruzione di grandi strutture coerenti (rulli convettivi). L'animazione delle funzioni di corrente mostra un moto "a ingranaggi", in cui i rulli si comportano come ruote dentate deformabili. Il meccanismo dominante di dissipazione di energia sembra essere la coalescenza dei rulli co-rotanti (si vedano, ad esempio, le istantanee 4-7). La sequenza relativa al campo di temperatura, figura 3.17b, mostra che, ad ogni istante, le regioni di stratificazioni termica instabile sono diffuse in tutta la cavità, con punti caldi corrispondenti ai centri dei rulli convettivi dove vi è un minore mescolamento.

3.5 Frequenza di rinnovo dei rulli

Come si è visto in precedenza, in tutti i casi di moto non stazionario (sia periodici che caotici) la dipendenza temporale è dominata dalla frequenza di rinnovo dei rulli f_p . Per ogni caso studiato, il metodo più affidabile per la stima della frequenza periodica è quello di esaminare le sequenze temporali della funzione di corrente: il tempo $t_p = f_p^{-1}$ può essere identificato con l'intervallo fra le successive comparse di coppie di rulli di circolazione nella regione superiore del dominio.

I risultati sono riassunti per tutti i casi non stazionari in figura 3.18, nella quale f_p è riportata in funzione del numero di Grashof. Le barre di dispersione indicano il campo di oscillazione di f_p durante il tempo di simulazione. Naturalmente il transitorio iniziale è stato escluso dalla valutazione.

La frequenza f_p è normalizzata rispetto alla frequenza di riferimento $F_0 = (g\beta\theta_0/D)^{1/2}/(2\pi)$, cioè è in realtà un numero di Strouhal. La frequenza f_p decresce leggermente con Gr nel ristretto campo di esistenza del moto periodico, presenta un minimo di ~ 0.15 per $Gr = 7.03 \cdot 10^5$ e poi cresce con $Gr^{1/3}$ nel campo quasi periodico e di caos incipiente, tendendo ad un valore di ~ 0.25 per $Gr = 3.79 \cdot 10^6$. L'ulteriore aumento di Gr da $3.79 \cdot 10^6$ a $1.26 \cdot 10^9$ (moto pienamente caotico) porta solo ad un lieve ulteriore aumento di f_p , da ~ 0.25 a ~ 0.30 .

La modesta variazione di f_p in un campo molto ampio del numero di Grashof (che copre $3\frac{1}{2}$ decenni) indica che la dipendenza da $Gr^{1/2}$ inclusa nella definizione della scala delle frequenze F_0 tiene conto della maggior parte della dipendenza di f_p dal numero di Grashof. Giunsero alle stesse conclusioni, per esempio, Henkes e Hoogendoorn [1990] nelle loro simulazioni per moto in cavità

scaldata differenzialmente. La frequenza di rinnovo dei rulli valutata qui per il caso di moto periodico (0.15-0.20) è prossima a quella (0.12 nelle presenti unità) ottenuta da Janssen e Henkes [1995] per una cavità quadrata scaldata differenzialmente con un fluido a $Pr=0.71$, nonostante le differenze nelle condizioni al contorno del problema. È anche dello stesso ordine di grandezza di quella (0.05 nelle presenti unità) calcolata da May [1991] per una cavità quadrata con generazione interna di potenza e quattro pareti isoterme per $Pr=7$. Questo supporta l'universalità della scala qui adottata per le frequenze e, in particolare, la scelta della larghezza della cavità (piuttosto che la sua altezza) come scala fondamentale delle lunghezze.

Per illustrare il tipo di stratificazione che si stabilisce nella cavità a differenti numeri di Grashof la figura 3.19 riporta i profili verticali della temperatura mediata lungo x e nel tempo:

$$\langle \bar{T} \rangle_x (y) = \int_{-1/2}^{1/2} \bar{T}(x, y) dx \quad (3.2)$$

I risultati dei casi stazionari, periodici e caotici sono stati inclusi nella stessa figura. Si può osservare che, per i più bassi valori di Gr , corrispondenti ai casi stazionari e al primo caso periodico ($Gr=3.79 \cdot 10^5$), la stratificazione verticale è molto piccola a causa del ruolo marginale della convezione rispetto a quello della conduzione. Tutti i casi da $Gr=7.03 \cdot 10^5$ a $Gr=3.79 \cdot 10^6$ (che includono moto periodico, quasi periodico e caotico) presentano un'inversione nel profilo verticale di $\langle \bar{T} \rangle_x$, con una stratificazione termica instabile (nelle medie temporali e lungo x) tra $y \approx 0$ e $y \approx 1$. Al crescere ulteriore di Gr , l'inversione scompare a causa dell'accresciuto rimescolamento e il profilo di $\langle \bar{T} \rangle_x$ ritorna all'andamento monotonicamente tipico dei casi a basso Gr , ma con una escursione più grande tra il basso e l'alto. Nell'intero campo dei moti non stazionari, la stratificazione verticale varia molto poco; al crescere di Gr , la diminuzione di temperatura vicino alla parete superiore (dovuta all'aumento del mescolamento) è compensata da una comparabile riduzione della temperatura vicino alla parete inferiore (dovuta a una più efficace penetrazione del fluido freddo che, lasciati gli strati limite discendenti di parete, si sposta verso la parte centrale della cavità). Di conseguenza, i profili di $\langle T \rangle_x$ in figura 3.19 si spostano in basso, ma la loro pendenza rimane la stessa. Se calcoliamo tale pendenza come:

$$C = \langle \bar{T} \rangle_x (y = +AR/2) - \langle \bar{T} \rangle_x (y = -AR/2) \quad (3.3)$$

questa rimane prossima a 0.25 in tutto il campo del numero di Grashof per cui si ha moto non stazionario.

3.6 Attrattore del sistema dinamico

La dinamica complessiva dei campi di moto e di temperatura è illustrata per differenti valori del numero di Grashof in figura 3.20. Qui, i valori della velocità verticale v nei due punti di monitoraggio

P1 e P2 (che sono messi simmetricamente rispetto la mezzeria della cavità) sono rappresentati l'uno in funzione dell'altro durante l'evoluzione dinamica del moto dopo che il transitorio iniziale è terminato. I grafici sono tutti della stessa durata adimensionale (~ 20), cioè comprendono da 3 a 6 periodi principali t_P .

In tutti i casi, durante il transitorio iniziale (non riportato in figura per una più facile lettura), il punto (v_1, v_2) parte dall'origine (condizione iniziale di velocità nulla ovunque), si muove lungo la bisettrice $v_1=v_2$, si discosta da questa quando la simmetria bilaterale si rompe, ed infine entra in un'orbita asintotica. Ognuno dei grafici in figura 3.20 può quindi essere visto come la proiezione sul piano (v_1, v_2) di una regione finita dell'attrattore del sistema; ovviamente quest'ultimo è definito nello spazio delle fasi del sistema stesso, che ha un numero di dimensioni pari al numero dei suoi gradi di libertà. Per semplicità, qui e nel seguito, un tale grafico verrà semplicemente chiamato "l'attrattore".

Ovviamente, nei casi di moto stazionario (non riportati) nei quali la simmetria si mantiene, il punto rappresentativo non lascia mai la bisettrice $v_1=v_2$, e l'attrattore collassa in un punto che giace su questa retta.

Nei casi periodici, come per esempio quello a $Gr=3.78 \cdot 10^5$, grafico (a), l'attrattore è un ciclo limite a forma di 8 che è percorso ripetutamente durante la simulazione. Esiste quindi una biforcazione di Hopf tra $Gr=2.19 \cdot 10^5$ (valore più alto per il quale si abbia moto stazionario) e $Gr=3.78 \cdot 10^5$. Il periodo dell'orbita a forma di 8 coincide con quello, già discusso, di rinnovo dei rulli $t_F=f_P^{-1}$. Lo stesso attrattore è simmetrico rispetto alla bisettrice $v_1=v_2$, il che causa le caratteristiche del moto discusse nel §3.2 e rende le medie temporali perfettamente simmetriche rispetto alla mezzeria della cavità ($x=0$), si veda la figura 3.21.

Il caso seguente $Gr=1.26 \cdot 10^6$, grafico (b), è leggermente al di là della rottura della perfetta periodicità, come mostrato anche dalle sequenze temporali precedentemente viste nelle figure 3.10 e 3.11. La traiettoria nel piano (v_1, v_2) adesso descrive orbite consecutive che sono solo grossolanamente simili l'una all'altra. Inoltre ogni orbita non mostra una simmetria destra-sinistra.

I grafici (c) e (d) in figura 3.20 si riferiscono a numeri di Grashof in campo caotico. Si nota un crescente aggrovigliamento delle traiettorie. La simmetria dell'attrattore rispetto alla bisettrice, comunque, non varia monotonicamente con Gr , ma piuttosto sembra aumentare di nuovo se paragonato al caso con la più forte asimmetria $Gr=1.26 \cdot 10^6$ nel grafico (b). Inoltre, la regione dello spazio delle fasi occupata dalle traiettorie tende a restringersi e a divenire più regolare all'aumentare di Gr . Ciò traduce il fatto che l'intensità *relativa* delle fluttuazioni raggiunge il massimo in corrispondenza della transizione al moto caotico per poi decrescere all'ulteriore aumentare del numero di Grashof.

3.7 Medie e momenti

Per alcuni dei casi simulati sono riportate nelle figure seguenti (da 3.21 a 3.24) alcune medie temporali e altre grandezze statistiche ottenute elaborando serie temporali della durata di $6\div 8$ periodi principali t_P .

La figura 3.21 mostra la media temporale della funzione di corrente. Nel caso periodico $Gr=3.79\cdot 10^5$ (a), coerentemente con il comportamento dell'attrattore illustrato nella figura 3.20(a), la media temporale del campo di moto mostra una perfetta simmetria bilaterale destra-sinistra, con una sola cella di circolazione per lato. I centri di circolazione sono spostati verso il basso. Nel caso seguente $Gr=1.26\cdot 10^6$ (b), corrispondente a moto caotico incipiente, la media temporale della funzione di corrente è marcatamente asimmetrica, come può dedursi anche dalla forma dell'attrattore in figura 3.20(b). Inoltre, la circolazione presenta una struttura multicellulare. Al crescere di Gr , si recupera in parte la struttura unicellulare e simmetrica del campo di moto medio, come mostra la figura 3.21(c) relativa a $Gr=3.79\cdot 10^8$.

Il campo di temperatura mediato nel tempo è mostrato per gli stessi casi in figura 3.22. Al crescere di Gr , la regione centrale, che presenta una significativa stratificazione termica, si allarga, mentre gli strati limite verticali diventano più sottili. Le stesse considerazioni fatte sopra sono valide per quanto riguarda la simmetria della soluzione mediata nel tempo.

Un'attenta analisi delle sequenze temporali mostra che le proprietà di simmetria sopra illustrate delle traiettorie e delle medie temporali dipendono in modo cruciale dalla dimensione dei rulli di circolazione e cioè dal numero esatto di questi che può simultaneamente occupare il volume della cavità in ogni istante. Come mostrato nella figura 3.7(a), nel caso periodico $Gr=3.79\cdot 10^5$ sono presenti per la maggior parte del tempo tre rulli per lato, disposti in una configurazione alternata. Questa dovrebbe paragonarsi con la figura 3.11(a), nella quale è stata riportata una sequenza temporale che copre approssimativamente un periodo principale t_P (~ 5.8) per il caso $Gr=1.26\cdot 10^6$. Si può osservare che la grandezza media delle celle di circolazione è più piccola che nel caso precedente, così che nella cavità sono presenti per la maggior parte del tempo quattro rulli nella metà destra ma soltanto tre nella metà opposta. Ciò causa la marcata asimmetria delle traiettorie in figura 3.20(b), come pure delle medie temporali in figura 3.21(b). Al crescere del numero di Grashof, la grandezza media dei rulli aumenta di nuovo, così che per $Gr=3.79\cdot 10^8$, come mostrato in figura 3.17, sono nuovamente presenti per la maggior parte del tempo tre rulli per lato, con la conseguenza di un campo medio più simmetrico (figura 3.21(c)).

L'energia e delle fluttuazioni della velocità è riportata per i quattro casi: $Gr=3.79\times 10^5$, $3.79\cdot 10^6$, $3.79\cdot 10^7$ e $3.79\cdot 10^8$ in figura 3.23. Qui, e è resa adimensionale rispetto a U_0^2 , essendo $U_0=D/\tau_0$ la velocità di riferimento. Al crescere di Grashof, la regione caratterizzata dalla massima intensità delle fluttuazioni si sposta verso il basso e i meccanismi di generazione di fluttuazioni di tipo idrodinamico tendono a prevalere su quelli associati a instabilità termiche (in parallelo con l'aumento della stabilità

della stratificazione termica nella regione centrale della cavità). I livelli di e aumentano marcatamente nella transizione dal moto periodico al primo caso caotico, ma poi diminuiscono (una volta espressi nella presente forma adimensionale) al crescere ulteriore di Gr .

La distribuzione della fluttuazione quadratica media di temperatura (adimensionalizzata rispetto alla temperatura conduttiva ϑ_c) è mostrata per gli stessi quattro casi in figura 3.24. Si può osservare il progressivo assottigliamento delle regioni caratterizzate da fluttuazioni di temperatura significative (bordi degli strati limite verticali). In tutti i casi la colonna ascendente mostra dei livelli molto piccoli di fluttuazione. L'intensità delle fluttuazioni termiche si comporta come quella delle fluttuazioni di velocità, cioè aumenta marcatamente nella transizione da moto periodico al primo caso caotico, ma poi torna a decrescere al crescere ulteriore di Gr . Poiché anche la media temporale della temperatura decresce con Gr , la fluttuazione di temperatura *relativa* si mantiene a un valore pressappoco costante nel limite di elevati Gr .

3.8 Attrito di parete e scambio termico

La figura 3.25(a) riporta, per tutti i casi studiati, le medie temporali dei profili di attrito alla parete mediate a loro volta tra la parete destra e sinistra e normalizzate rispetto ρU_0^2 , prendendo così la forma del coefficiente di attrito C_f .

Tutte le curve esibiscono un picco vicino alla parte più alta della cavità, dove gli strati limite orizzontali cambiano direzione per incontrare le pareti fredde; nei casi periodici e di transizione, questo è accompagnato da un altro picco nella parte bassa della cavità, associato all'aumento dell'intensità delle fluttuazioni negli strati limite discendenti, mentre nei casi pienamente caotici il profilo globale risulta più piatto.

La figura 3.25(b) riporta il valore mediato nello spazio del coefficiente di attrito $\langle C_f \rangle$ in funzione di Gr per l'intero campo studiato. Per i valori più bassi di Gr , i valori calcolati di $\langle C_f \rangle$ sono molto vicini al valore $4\pi^2/15 \approx 2.63$ dedotto dalla soluzione analitica discussa nel capitolo 2, che può essere vista come la soluzione asintotica limite di C_f per $Gr \rightarrow 0$. Per Gr più alti, C_f diminuisce rapidamente con $Gr^{-1/3}$, cioè l'attrito alla parete dimensionato diminuisce con $U_0^{-4/3}$, esibendo così un comportamento intermedio tra quello tipico delle resistenze viscosse e quelle idrauliche.

Per la presente configurazione, il valore medio del flusso alla parete sotto la condizione di equilibrio termico è $qD/2$; questo valore può essere usato per normalizzare i valori locali e/o istantanei del flusso termico alla parete q'' . La figura 3.26(a) mostra i profili di flusso termico alla parete per tutti i casi studiati, tutte le curve rappresentano le medie temporali a lungo periodo, che sono state mediate tra le pareti destra e sinistra e rappresentate in funzione della coordinata verticale adimensionale.

Per i casi stazionari e periodici le curve sono piuttosto piatte, con piccole variazioni rispetto al valore medio $qD/2$. D'altra parte, notevoli variazioni sono presenti per alti numeri di Grashof nel campo di esistenza del moto caotico. I valori di picco sono ottenuti nella parte alta della cavità dove il

fluido caldo, proveniente dalla colonna centrale ascendente, incontra la parete fredda, viceversa i valori più bassi si ottengono nella parte bassa dove avviene la separazione degli strati limite di parete. Nella zona centrale la distribuzione è pressoché piatta.

L'influenza di Gr sullo scambio termico è mostrata in figura 3.26(b). Questa riporta in funzione del numero di Grashof, per tutti i casi studiati, le quantità $Nu_1=1/T_{max}$ (con T_{max} la massima temperatura nella cavità mediata nel tempo) e $Nu_2=(2/3)\langle T \rangle$ (in cui $\langle T \rangle$ è la temperatura mediata nello spazio e nel tempo). L'ultima definizione è tale che si abbia $Nu_2=1$ per una distribuzione di temperatura puramente conduttiva. Entrambe le quantità possono essere viste come una definizione alternativa del numero di Nusselt (rapporto tra il flusso termico globale e quello conduttivo) per la configurazione attuale. È interessante notare che, per numeri di Grashof minori di $2 \cdot 10^6$ (stati stazionari, condizioni periodiche e di transizione), il risultato della convezione è quello di un aumento del massimo di temperatura ($Nu_1 < 1$) rispetto al caso puramente conduttivo a causa del trasporto di fluido caldo nelle regioni più calde (in prossimità della parete superiore). Come già detto, questo fenomeno è stato notato da altri autori per differenti tipi di fluidi [De Socio *et al.*, 1979].

Come ci si aspetta nei metalli liquidi, Nu_1 e Nu_2 non sono mai molto alti, raggiungendo rispettivamente i valori di 2.4 e 2.7 per il più elevato numero di Grashof studiato ($1.26 \cdot 10^9$). Ciò mostra che anche la intensa convezione turbolenta, che prevale ad alti Gr , fa crescere lo scambio termico solo moderatamente.

Per $Gr > \sim 10^6$, sia Nu_1 che Nu_2 aumentano approssimativamente come $Gr^{1/6}$. Questo comportamento differisce da quello ($Nu_2 \sim Gr^{0.23-0.24}$) indicato dai risultati sperimentali di Fiedler e Wille [1971] e Kulacki e Nagle [1975] e dagli studi numerici di Farouk [1988] e Dinh e Nourgaliev [1996], che, comunque, si riferiscono a strati fluidi raffreddati solamente nella superficie superiore e a numeri di Prandtl 6-7. La dipendenza meno marcata dal numero di Grashof trovata nel presente studio è coerente con il basso numero di Prandtl considerato (0.0321); sfortunatamente, nessun risultato, sperimentale o numerico, viene descritto in letteratura per lo specifico caso di generazione interna di potenza in un fluido a basso numero di Prandtl.

3.9 Conclusioni per $AR=4$

Per $AR=4$, al variare del numero di Grashof, si sono trovati differenti tipi di moto: stato stazionario, periodico, caotico. Ciò suggerisce che al crescere del numero Grashof, il moto è sottoposto dapprima a una biforcazione di Hopf, che porta ad un regime periodico, poi ad transizione al caos. Il regime periodico esiste solo per un piccolo intervallo del numero di Grashof.

In tutti i casi il transitorio iniziale include la nascita e la crescita di due celle di circolazione allungate e simmetriche sui due lati della cavità. Ai valori più bassi di Gr (fino a $\sim 2 \cdot 10^5$), queste celle rimangono stabili (moto base) e si ottiene una configurazione di stato stazionario. Le simulazioni numeriche portano a distribuzioni di velocità e temperatura che, lontane dalle pareti orizzontali della cavità, sono bene approssimate dalla soluzione analitica derivata sotto l'ipotesi di moto parallelo. La

temperatura massima nella cavità è un po' maggiore del massimo che si ottiene per una distribuzione puramente conduttiva: $\vartheta_c = qD^2/(8k)$ ciò è dovuto ad un accumulo di fluido caldo nella parte alta della cavità, mentre il valore medio rimane vicino al valore conduttivo di $(2/3)\vartheta_c$. Nella loro forma dimensionata la velocità nella colonna ascendente e negli strati limite discendenti di parete, come pure lo sforzo tangenziale di attrito, variano linearmente col numero di Grashof nel campo delle soluzioni stazionarie.

Soluzioni periodiche sono state ottenute per Gr compreso tra $3.79 \cdot 10^5$ e $7.03 \cdot 10^5$. Il moto base è destabilizzato dalla nascita di oscillazioni della colonna centrale ascendente che danno luogo ad una circolazione a più celle, "rulli". A seguito del transitorio iniziale, i rulli sono alternativamente generati negli angoli superiori destro e sinistro e scendono lungo le pareti isoterme fino a quando non raggiungono la regione inferiore della cavità, dove la loro energia viene dissipata dagli sforzi viscosi; ogni vortice ripete la stessa storia del precedente. Alla transizione da moto stazionario a periodico si accompagna la transizione da soluzioni con simmetria bilaterale a soluzioni asimmetriche alternate (biforcazione di Hopf), tuttavia la media temporale rimane simmetrica. L'attrattore corrispondente nell'appropriato spazio delle fasi è un ciclo limite che riflette questa simmetria spaziale bilaterale.

Per $Gr \gg 10^6$ si perde la periodicità del moto e si ottengono soluzioni caotiche, che presentano uno spettro a banda larga. È presumibile, sebbene una dimostrazione rigorosa non sia strettamente possibile a mezzo di simulazioni numeriche, che in un campo intermedio (diciamo da 1 a $3 \cdot 10^6$) esistano soluzioni quasi periodiche caratterizzate da due frequenze fondamentali incommensurabili.

Nel campo caotico l'instabilità iniziale, che porta all'allontanamento dal moto base, è associata con la comparsa di rulli secondari controrotanti (quello a sinistra in senso orario, quello a destra in senso antiorario) nella parte bassa della cavità. Questo dà luogo a due getti opposti, diretti verso la linea centrale della cavità, che non appena perdono la loro simmetria si scavalcano a vicenda, provocando uno sbandieramento laterale della corrente ascendente che alla infine si traduce in un moto irregolare e multicellulare. Sembrano giocare un ruolo anche le instabilità termiche con fluido "intrappolato" vicino al centro dei rulli che si surriscalda dando luogo localmente a stratificazione termica instabile. La coalescenza dei rulli avviene in posizioni e ad istanti casuali mentre questi scendono, e sembra essere il principale meccanismo per la dissipazione dell'energia meccanica nel regime caotico.

La transizione al moto caotico è accompagnata da una rottura di simmetria anche nelle medie temporali a lungo termine, in una misura che dipende dalla grandezza dei rulli e cioè dal numero di questi che si può trovare nella cavità in uno stesso istante.

Le serie temporali delle grandezze di monitoraggio nel campo caotico, come pure le istantanee dei campi di moto e di temperatura, mostrano chiaramente fenomeni di intermittenza nello spazio e nel tempo. In corrispondenza gli spettri esibiscono una regione a bassa frequenza associata al rinnovo dei rulli, una larga banda intermedia caratterizzata da una pendenza di $-5/3$, e una caduta ripida a frequenze maggiori di un certo valore di taglio. Quest'ultimo dipende dal numero di Grashof ed è associato con le scale dissipative del moto caotico.

In ogni caso per i regimi non stazionari (sia periodici che caotici) la frequenza dominante è identificabile con quella di rinnovo dei rulli, cioè la frequenza con cui un paio di rulli di circolazione vengono a formarsi negli angoli superiori della cavità. Una volta adimensionalizzata, tale frequenza decresce nel campo di esistenza del regime periodico, per crescere con $Gr^{1/3}$ nella transizione e mantenersi praticamente costante a un valore di 0.25-0.30 nel campo dei regimi caotici.

Per valori sufficientemente alti del numero di Grashof ($>10^6$), il numero di Nusselt mediato nel tempo (definito sulla base della temperatura massima o della temperatura media spaziale) cresce come $Gr^{1/6}$ e tende al valore relativamente basso di ~ 2 ai più alti Gr studiati ($1.26 \cdot 10^9$). Il coefficiente di attrito di parete decresce con $Gr^{-1/3}$.

4. Risultati per $AR=1$

Facendo seguito allo studio per cavità snella ($AR=4$) esposto nel capitolo 3, le simulazioni sono state estese al caso di cavità quadrata, per un intervallo di valori del numero di Grashof compreso tra 10^5 e 10^9 .

Per Gr fino a $\sim 10^7$ il moto è stazionario e mostra una simmetria bilaterale destra sinistra. Per $Gr \approx 3 \cdot 10^7$ la simmetria viene persa e si ottiene un campo di moto sempre stazionario, ma asimmetrico. Per $Gr \approx 5 \cdot 10^7$ il moto diviene periodico. Infine, per $Gr \geq 10^8$, il moto presenta un comportamento caotico; i campi medi della velocità e della temperatura sono ancora marcatamente asimmetrici per $Gr = 10^8$, ma ritornano nuovamente simmetrici per Gr maggiori (10^9), quando si osserva una turbolenza bidimensionale sviluppata.

Per numeri di Grashof al di sopra di $\sim 10^6$, il coefficiente di attrito mediato lungo la parete verticale diminuisce approssimativamente come $Gr^{-1/3}$ (come nella cavità snella), mentre il numero di Nusselt cresce all'incirca come $Gr^{1/7}$, cioè un po' meno marcatamente che nel caso di cavità snella.

Il dominio di calcolo e la nomenclatura relativa sono mostrati in figura 4.1.

4.1 Moto stazionario

Per $Gr \leq 10^7$, il moto trova una soluzione laminare stazionaria con simmetria bilaterale. Il comportamento di alcune grandezze durante il transitorio iniziale che porta alla stazionarietà è mostrato in figura 4.2.

La figura 4.2a riporta le temperature massima e media in funzione del tempo. Come visto nel capitolo 3, il rateo di crescita iniziale della temperatura nella cavità è lo stesso in tutti i punti e, in termini adimensionali, è dato da $\partial T / \partial t = (32\pi\sqrt{2}) / (Pr\sqrt{Gr})$. Perciò, nella forma adimensionale qui usata, come già visto, la pendenza iniziale decresce col crescere di Gr . Per lo stato stazionario, i valori più alti di temperatura si hanno per il caso $Gr = 10^6$, per il quale si supera il valore del massimo conduttivo di circa il 10%. D'altra parte, le temperature mediate nel volume decrescono monotonicamente con Gr ; queste sono circa il 30% più basse del valore puramente conduttivo per $Gr = 10^7$, mentre praticamente coincidono per il più basso valore del numero di Grashof (10^5), il che indica che la convezione non contribuisce molto allo scambio termico per valori così bassi di Gr , almeno per il presente valore del numero di Prandtl (0.0321).

La figura 4.2b mostra invece la velocità verticale v in funzione del tempo nei punti di monitoraggio P1 e P4. Si può osservare un aumento della velocità con Gr , che, come visto nel capitolo 3, è principalmente dovuto al fatto che nel limite di bassi Gr la velocità varia con Gr piuttosto che con

$Gr^{1/2}$.

La funzione di corrente Ψ e la temperatura T adimensionali sono mostrate in figura 4.3, per gli stessi casi. Al solito la funzione di corrente è adimensionalizzata con $DU_0=D^2/\tau_0$. I risultati sono qualitativamente simili a quelli visti per la cavità snella ($AR=4$); vi è una cella di circolazione per lato con una perfetta simmetria bilaterale. Il caso a Gr più basso mostra anche una simmetria alto-basso della Ψ e una stratificazione termica orizzontale, dovuta al ruolo predominante della conduzione. Per Gr più alti, il ruolo della convezione aumenta sviluppando una moderata stratificazione termica verticale, specialmente nella regione superiore della cavità.

Per un numero di Grashof pari a $3 \cdot 10^7$, si prevede un tipo di moto nettamente differente. La figura 4.4 riporta la velocità verticale (a) e le temperature (b) in funzione del tempo, nei punti di monitoraggio P1, P2 e P3, P5 (posti simmetricamente rispetto alla mezzeria). Dopo $t \approx 5$, il moto tende ad uno stato stazionario simmetrico. Comunque, in realtà non si arriva mai a tale configurazione, e, per $t \approx 10$, le grandezze poste in punti simmetrici nello spazio cominciano a differire, fino a quando, per $t \approx 20$, si ottiene uno stato asimmetrico stazionario. L'asimmetria è particolarmente marcata nella regione superiore della cavità (punti P3-P5). L'evoluzione del campo di moto dallo stato iniziale di fluido fermo alla configurazione asimmetrica finale, è mostrata meglio in figura 4.5 nella forma di diagramma vettoriale della velocità istantanea a intervalli regolari di ~ 2.8 (in unità τ_0). La rottura di simmetria si può osservare tra le istantanee corrispondenti a $t=11.2$ e $t=14$.

Le distribuzioni finali di funzione di corrente e di temperatura sono riportate in figura 4.6. Il campo di temperatura, se paragonato con l'ultimo caso simmetrico ($Gr=10^7$), figura 4.3, mostra solamente una piccola diminuzione del valore massimo (da ~ 0.7 a ~ 0.6 in termini adimensionali), ma è presente una notevole distorsione dell'intera distribuzione. La transizione da uno stato simmetrico ad uno asimmetrico indica l'esistenza di una biforcazione con rottura spaziale di simmetria per un valore intermedio del numero di Grashof compreso tra 10^7 e $3 \cdot 10^7$. Una simile rottura di simmetria è stata predetta da Churbanov *et al.*[1994] per un contenitore quadrato con fluido a $Pr=7$ e $Gr \leq 10^7$, e da Farouk [1988] per $AR=0.5$, $Pr=6.5$, $Gr \leq 10^7$, ma non da by Fusegi *et al.*[1992a, b] per $AR=1$, $Pr=5.85$, Gr fino a $\sim 10^9$.

4.2 Moto periodico

Per un numero di Grashof pari a $5.4 \cdot 10^7$ (media tra $3 \cdot 10^7$ e 10^8 in scala logaritmica), si trova un comportamento perfettamente periodico. La figura 4.7 mostra l'andamento nel tempo della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) nei punti di monitoraggio P1, P2 e P3, P5 (simmetrici rispetto la mezzeria). Dopo un transitorio iniziale (abbastanza simile a quello riportato in figura 4.4 per il caso stazionario simmetrico $Gr=10^7$) per $t \approx 15$ le fluttuazioni cominciano a svilupparsi in tutte le grandezze dando luogo ad oscillazioni periodiche per $t \approx 25$. Poiché le oscillazioni periodiche si sviluppano dopo

la rottura di simmetria spaziale (che avviene per $t \approx 10$), queste sono imposte sopra ad un profilo base che è già asimmetrico rispetto alla mezzeria della cavità.

Il diagramma vettoriale durante il transitorio iniziale, fino allo stabilirsi del moto periodico, è del tutto analogo a quello di figura 4.5, che mostra la rottura di simmetria del caso stazionario asimmetrico. Di grande interesse è il comportamento del moto dopo che la periodicità si è stabilita; la figura 4.8 riporta le funzioni corrente (a) e le isoterme (b) solamente per la componente oscillante (mappa istantanea – media temporale), per intervalli regolari di tempo $\Delta t \approx 0.07$ (adimensionale). Il periodo adimensionale di oscillazione è di ~ 0.42 , corrispondente a una frequenza di ~ 2.4 ; così che la sequenza di sette istantanee ricopre un intero periodo.

Il comportamento del campo di moto in figura 4.8 e può essere interpretato come il passaggio di un disturbo di velocità antisimmetrico che si muove verso l'alto come un'onda viaggiante con velocità di propagazione ~ 1.6 e di lunghezza d'onda $\sim 2/3$ (nella presente forma adimensionale), che portano ad una frequenza di ~ 2.4 . Comunque, le pareti orizzontali e la natura antisimmetrica del profilo base introduce ulteriori complessità; i centri di circolazione della parte fluttuante sembrano muoversi in diagonale attraverso la cavità; un periodo si completa quando il massimo della funzione di corrente, che occupa l'angolo in basso a sinistra nella prima istantanea, sostituisce quello che occupa l'angolo opposto (in alto a destra). Nel moto globale (medio + parte fluttuante), la dipendenza temporale si osserva difficilmente a causa della piccola ampiezza delle oscillazioni, questa appare come un moto ciclico dei centri delle celle di circolazione attorno a orbite piccole approssimativamente ellittiche, come si può vedere da un'animazione del moto.

Più complessa appare la distribuzione della fluttuazione di temperatura in figura 4.8b; le oscillazioni periodiche sono difficili da interpretare come disturbi viaggianti, ma piuttosto sembrano risultare in un moto alternato dei massimi verso e da la mezzeria della cavità. L'ampiezza delle oscillazioni, comunque, è molto piccola paragonata ai valori base di T .

Gli spettri della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) nel punto di monitoraggio P1 sono riportati per questo caso in figura 4.9. Questi sono stati calcolati dalla corrispondente sequenza in figura 4.7 usando i dati dell'intervallo $t=25-30$, che copre approssimativamente 12 periodi. Si nota un picco stretto per $f \approx 2.4$; l'ulteriore picco significativo corrisponde alla prima armonica della suddetta frequenza. Risultati simili, caratteristici del moto periodico, sono ottenuti per gli altri punti di monitoraggio.

4.3 Transizione al comportamento caotico

Come osservato per la cavità allungata, anche in questo caso il campo di esistenza del regime periodico è limitato. Già per $Gr = 10^8$, si perde la perfetta periodicità e cominciano ad apparire delle fluttuazioni irregolari nel campo di moto e di temperatura.

La figura 4.10 mostra la velocità verticale v (a) e la temperatura T (b) nei punti di monitoraggio P1 e P2 in funzione del tempo. Tali grandezze si possono paragonare con quelle viste in figura 4.7 per il caso periodico ($Gr = 5.4 \cdot 10^7$); nel caso in esame la rottura di simmetria avviene in tempi paragonabili ($t \approx 13$ in unità τ_0), ma questa subito dopo è accompagnata dalla crescita di oscillazioni irregolari. Si nota che le maggiori irregolarità si presentano nel punto P2 (in basso a destra), mentre il comportamento di v_1 e di T_1 (in basso a sinistra) consiste in una oscillazione quasi periodica con una frequenza pseudo-periodica adimensionale $f_P \approx 2$, simile a quella del caso periodico visto precedentemente, ma modulata da una sub-armonica di frequenza ~ 0.27 (che non è correlabile con f_P mediante alcun rapporto piccolo intero).

Le sequenze delle istantanee dei campi di moto e di temperatura non sono qui riportate in quanto del tutto analoghe a quelle già viste per il caso periodico in figura 4.8; infatti, le componenti non periodiche delle fluttuazioni, che includono oscillazioni di sub-armoniche, hanno un'ampiezza troppo piccola per essere viste in tali grafico. E' da notare che il moto base asimmetrico che segue la rottura di simmetria per $t \approx 13$ si mantiene oltre l'ulteriore evoluzione dei campi di velocità e di temperatura.

Gli spettri normalizzati sono riportati in figura 4.11 per la velocità verticale v (a) e per la temperatura T (b) nel punto di monitoraggio P1; questi sono stati ottenuti elaborando le serie temporali tra $t=27$ e $t=42$ (unità τ_0). La frequenza sub-armonica $f \approx 0.27$ è chiaramente visibile nello spettro della velocità, dove la sua ampiezza è anche superiore a quella associata alla frequenza pseudo-periodica f_P , ma è difficilmente distinguibile nello spettro di temperatura. Entrambi gli spettri mostrano, vicino alla frequenza pseudo-periodica, una frequenza più bassa di ~ 1.7 . Il valore più alto di f che è ancora associato ad un contenuto di energia significativo è ~ 4 .

Sebbene siano presenti altre frequenze si può affermare che il moto è praticamente caratterizzato da tre frequenze principali non correlate (0.27, 1.7, e 2), ciò suggerisce che il presente numero di Gr è vicino alla condizione di moto quasi periodico ed è appena oltre al valore critico per la transizione al comportamento caotico.

4.4 Moto pienamente caotico

Un ulteriore aumento del numero di Grashof fino a 10^9 porta ad un comportamento pienamente caotico, nel quale anche la asimmetria destra-sinistra mostrata nel caso precedente si perde e le medie temporali tornano nuovamente a mostrare una perfetta simmetria. L'evoluzione temporale della velocità v e della temperatura T nei punti di monitoraggio P1 e P2 è mostrato in figura 4.12 per una durata totale di ~ 35 (unità τ_0). Si può osservare il comportamento altamente irregolare di tutte le quantità e la perdita della marcata asimmetria, nel comportamento del moto a lungo periodo, tra la metà destra e sinistra della cavità. Inizialmente le grandezze relative a punti simmetrici esibiscono oscillazioni che, sebbene apparentemente caotiche, sono identiche e in fase. Le grandezze in punti

simmetrici cominciano a divergere per un tempo adimensionale di ~ 10 , prossimo a quello osservato nei casi in cui si è avuta una rottura di simmetria ($3 \cdot 10^7 \leq Gr \leq 10^8$). Comunque, nel presente caso grandi oscillazioni irregolari si sviluppano simultaneamente prevenendo così l'assestamento ad un moto base asimmetrico.

Gli spettri normalizzati (derivati dall'intervallo che va da $t = 20$ a 35) sono mostrati in figura 4.13 per la velocità verticale v (a) e per la temperatura T (b) nel punto di monitoraggio P1. Nel presente caso, sono stati riportati in scala doppiamente logaritmica poiché è presente un contenuto di energia significativo in un ampio campo di frequenze. La frequenza dominante $f_p \approx 0.8$ è associata alle fluttuazioni più cospicue della velocità verticale v in figura 4.12(a) e corrisponde alla frequenza pseudo-periodica di ~ 2 osservata per il caso a $Gr = 10^8$ e a quella di ~ 2.4 osservata per il caso periodico a $Gr = 5.4 \cdot 10^7$.

L'evoluzione dei campi di moto e di temperatura durante lo pseudo-periodo $1/f_p \approx 1.25$ (adimensionale) è mostrata in figura 4.14, che riporta la funzione di corrente (a) e le isoterme (b) ad intervalli regolari di ~ 0.16 . Il campo di moto presenta fluttuazioni irregolari per ognuno dei rulli di circolazione, con occasionali separazioni o fusioni dei massimi locali; il campo di temperatura mostra più chiaramente lo sbandieramento obliquo e irregolare della colonna centrale ascendente, accompagnato dalla transitoria segregazione di zone "intrappolate" di fluido caldo e dalla discesa di perturbazioni simili ad onde viaggianti lungo gli strati limite discendenti.

La natura simmetrica delle distribuzioni del moto e della temperatura mediate nel tempo sono meglio evidenziate in figura 4.15, dove sono riportate anche le medie temporali di Ψ e T per il caso $Gr = 10^8$ per potere avere un migliore raffronto. Si può osservare la significativa diminuzione del massimo della temperatura adimensionale da 0.5 a 0.35 col crescere di Gr di un ordine di grandezza. Le linee di corrente mostrano che i centri dei rulli di circolazione si trovano vicino al fondo della cavità.

4.5. Attrattore del sistema dinamico

La dinamica globale dei campi di moto e di temperatura sono illustrati per differenti numeri di Grashof in figura 4.16. I valori della velocità verticale v nei due punti di monitoraggio P1 e P2 (che sono disposti simmetricamente rispetto la mezzeria) sono rappresentati l'uno contro l'altro, durante l'evoluzione del moto.

In tutti i casi, durante il transitorio iniziale i punti (v_1, v_2) partono dall'origine (condizioni iniziali), si muovono lungo la bisettrice $v_1 = v_2$, si allontanano da questa quando la simmetria si rompe, ed eventualmente, entrano in un'orbita asintotica (si veda il §3.6).

Nel caso periodico $Gr = 5.4 \times 10^7$, grafici (a) e (b), per il quale le sequenze temporali sono state riportate nella figura 4.7-4.8 e gli spettri in figura 4.9, l'attrattore è un ciclo limite che si ottiene dopo

un grande overshoot e che quindi viene ripetutamente spazzato durante la simulazione, con un periodo $t_P=f_P^{-1}\approx 0.42$.

Il caso seguente $Gr=10^8$, grafici (c) e (d), è un po' oltre la rottura della periodicità, come mostrato anche dalle sequenze temporali e gli spettri riportati nelle figure 4.10 e 4.11. A seguito del transitorio iniziale, la traiettoria nel piano (v_1, v_2) descrive orbite consecutive che sono solo lontanamente uguali l'una all'altra e mostrano un groviglio caratteristico del moto caotico.

Infine, il grafico (e) si riferisce al numero di Grashof 10^9 , ben dentro al regime caotico. Si può osservare un forte aumento dell'aggrovigliamento delle traiettorie. Comunque, la simmetria dell'attrattore rispetto alla bisettrice si mantiene, così che, come mostrato in figura 4.15(b), le medie temporali mostrano una perfetta simmetria bilaterale.

4.6 Isteresi

Per comprendere meglio quali siano le modalità con cui avvengono le transizioni da moto simmetrico ad asimmetrico, si sono condotte delle simulazioni assumendo come condizione iniziale un campo istantaneo, preso ad un istante arbitrario ben oltre il transitorio iniziale, relativo al caso di incipiente caoticità ($Gr=10^8$) e abbassando il valore della densità di generazione interna di potenza q .

Si è notato che pur abbassando q di un ordine di grandezza, e quindi ritornando al caso $Gr=10^7$, il moto risultante è ancora laminare e stazionario ma non è più simmetrico come quello ottenuto per $Gr=10^7$ a partire da fluido immobile, bensì stazionario asimmetrico. La funzione di corrente e il campo di temperatura sono mostrati in figura 4.17; si noti che la asimmetria del campo di moto è meno marcata che nel caso $Gr=3\cdot 10^7$, in figura 4.5 e 4.6.

Si noti che anche la riduzione a gradino di q (figura 4.17a) conduce ad una inversione della parità della soluzione rispetto alle condizioni iniziali, simili alle medie mostrate nella precedente figura 4.15.

In figura 4.18 sono riportate alcune istantanee nella forma di diagramma vettoriale che mostrano il transitorio.

Si è dunque in presenza di un fenomeno di isteresi, cioè le condizioni finali del moto dipendono dalle condizioni di partenza.

Se la riduzione di densità di generazione interna di potenza q viene effettuata gradualmente (figura 4.17b), facendola variare dal valore iniziale di 10^8 a quello finale di 10^7 con andamento esponenziale con costante di tempo di $\sim 10\cdot\tau_0$, la soluzione mantiene la stessa parità di quella iniziale ed è quindi la riflessione speculare della soluzione ottenuta con riduzione a gradino. Ciò mostra che la soluzione, oltre che dalle condizioni iniziali dipende anche dalla storia del transitorio attraversato.

Si è condotta un'ulteriore simulazione riducendo la densità di potenza di due ordini di grandezza, cioè da 10^8 a 10^6 , in questo caso la soluzione ritorna asintoticamente a quella inizialmente trovata partendo da fluido fermo e rappresentato in figura 4.3.

Questa situazione è stata descritta matematicamente, ad esempio da Joseph [1981], che la definisce come biforcazione sub critica (figura 4.19).

Partendo da un $Gr < Gr_{cr}$ (punto A in figura 4.19) e aumentando la potenza troveremo una soluzione simmetrica stazionaria fino a Gr_{cr} ; oltre questo valore si hanno soluzioni con rottura di simmetria spaziale; viceversa, ripercorrendo la curva all'indietro, da $Gr > Gr_{cr}$ troviamo la soluzione asimmetrica anche per valori minori di Gr_{cr} .

Il numero di stati del sistema nella zona di isteresi non è, come potrebbe sembrare, pari a quattro ma include solamente i due speculari, in quanto il tratto di curva BAC è instabile.

Sulla base dei risultati della precedente analisi, il valore di Gr_{cr} è compreso in questo caso tra 10^7 e $3 \cdot 10^7$, e i punti B e C di figura 4.19 corrispondono a valori di $10^6 < Gr < 10^7$. Il passaggio a gradino da $Gr = 10^8$ a 10^7 è rappresentato dal segmento PQ, mentre il passaggio a rampa fra gli stessi Gr estremi è rappresentato dal segmento PR.

Il fatto che la parità della soluzione cambi nel caso PQ è probabilmente dovuto al fatto che il repentino abbassamento della densità di potenza fa saltare il punto rappresentativo del sistema da un ramo all'altro della curva di biforcazione. Il transitorio da $Gr = 10^8$ a 10^6 è rappresentato invece dal segmento PS e conduce all'unica soluzione stabile simmetrica possibile.

4.7 Attrito di parete e scambio termico

La figura 4.20a riporta i profili mediati nel tempo dell'attrito alla parete lungo le pareti laterali per i casi studiati. Questo è stato ulteriormente mediato tra le pareti destra e sinistra e normalizzato con ρU_0^2 , ottenendo così il coefficiente di attrito C_f .

Tutte le curve mostrano un picco vicino alla sommità della cavità, dove gli strati limite orizzontali cambiano direzione incontrando le pareti fredde. La asimmetria alto-basso è minima per il caso a minore numero di Grashof (10^5), dove il ruolo della convezione è marginale e anche il campo di moto presenta un'approssimativa simmetria sopra sotto. I valori massimi locali di C_f (~ 3), e la maggiore asimmetria alto-basso, si ottengono per il caso seguente $Gr = 10^6$, mentre i picchi di C_f decrescono, ed il suo profilo diviene più uniforme, col crescere ulteriore di Gr . Così che, C_f è basso (~ 0.2) e piuttosto uniforme lungo le pareti per il caso pienamente caotico $Gr = 10^9$.

La figura 4.20b riporta $\langle C_f \rangle$, cioè C_f mediato nello spazio, in funzione di Gr per l'intero campo studiato. Ai più bassi valori del numero di Grashof, i valori di $\langle C_f \rangle$ calcolati si avvicinano ad un valore limite di ~ 1.7 , che è significativamente più basso del valore $4\pi^2/15 \approx 2.63$ dedotto analiticamente nel §2.3 nel caso di moto parallelo in cavità allungata indefinita che si avvicinava molto a quello valutato numericamente per $AR=4$ a bassi Gr . Comunque, si può osservare dalla figura 4.20a che il massimo di C_f (spostato in alto rispetto la metà dell'altezza) è abbastanza vicino al valore di sopra, mentre le regioni vicino le pareti orizzontali riducono sostanzialmente la media. Per Gr maggiori, $\langle C_f \rangle$ decresce approssimativamente come $Gr^{-1/3}$, come nel caso $AR=4$. Si noti che la transizione da moto stazionario a

moto non stazionario a $Gr \approx 3 \cdot 10^7$ è associata con un leggero aumento dell'ordinata all'origine della retta del $\langle C_f \rangle$, mentre la sua dipendenza da Gr da una legge di potenza $(-1/3)$ rimane praticamente inalterata.

La figura 4.21a riporta i profili di q'' , adimensionalizzati come già visto con $qD/2$ (§3.8), per tutti i casi studiati, in particolare per i casi dipendenti dal tempo le curve rappresentano le medie a lungo termine. Anche questi risultati sono mediati tra le pareti destra e sinistra per eliminare l'effetto della asimmetria del moto (se presente).

Per il più basso Gr (10^5) le curve sono abbastanza piatte, con piccole variazioni rispetto al loro valore medio. D'altra parte, sono presenti grosse variazioni per numeri di Grashof maggiori, specialmente nel campo caotico. Valori di picco di $\sim 1.6 \div 1.7$ si ottengono in corrispondenza dell'urto di fluido caldo sulle pareti fredde vicino alla parte alta della cavità, mentre valori bassi si ottengono in corrispondenza della separazione degli strati limite di parete vicino alla parte bassa della cavità. Per questo fattore di forma la regione centrale della cavità non presenta una distribuzione piatta di q'' come accadeva nella cavità snella di $AR = 4$.

L'influenza di Gr sullo scambio termico globale è mostra in figura 4.21b, che riporta le grandezze, definite precedentemente, $Nu_1 = 1/T_{max}$ e $Nu_2 = (2/3) \langle \bar{T} \rangle$ in funzione del numero di Grashof per tutti i casi esaminati.

E' interessante notare che, per numeri di Grashof al di sotto di 10^7 (corrispondenti a fluido stazionario simmetrico), il risultato effettivo della convezione è di un aumento del massimo della temperatura ($Nu_1 < 1$) per il trasporto di fluido caldo nelle regioni più calde della cavità (vicino la parete adiabatica superiore). Un simile risultato è stato ottenuto per la cavità di $AR=4$ (si veda §3.8) per Gr fino a $2 \cdot 10^6$, ed è stato osservato anche da De Socio *et al.* [1979] in corrispondenza della transizione per cavità con generazione interna di potenza.

Come ci aspettiamo nei metalli liquidi, Nu_1 e Nu_2 non sono mai molto alti, raggiungendo un valore comune di circa 2.66 al più alto Gr (10^9). I risultati sono simili a quelli ottenuti per la cavità snella (~ 2.4 e ~ 2.7 per Nu_1 e Nu_2 , rispettivamente) per un valore di Gr leggermente maggiore ($1.26 \cdot 10^9$), ciò mostra che il numero di Nusselt è ben scalato con il numero di Grashof basato sulla larghezza della cavità piuttosto che con l'altezza. Si noti che, nel presente caso di cavità quadrata, il forte rimescolamento verticale sopprime ogni significativa stratificazione termica verticale e causa la coincidenza numerica delle due definizioni del numero di Nusselt per $Gr \geq 3 \cdot 10^7$; al contrario, per $AR=4$, Nu_1 e Nu_2 erano ancora significativamente differenti a Gr maggiori (figura 3.26).

Per $Gr > \sim 10^6$, sia Nu_1 che Nu_2 variano approssimativamente con $Gr^{1/7}$. Questo comportamento è simile a quello trovato per la cavità ad $AR=4$ ma differisce da quello ($Nu_2 \sim Gr^{0.23-0.24}$) indicato dai risultati sperimentali di Fiedler e Wille [1971] e Kulacki e Nagle [1975] e dagli studi numerici di Farouk [1988] e Dinh e Nourgaliev [1997], i quali, comunque, si riferiscono a strati appiattiti

raffreddati solamente dalla superficie superiore e per numeri di Prandtl di 6-7; la più bassa dipendenza dal numero di Grashof trovata nel presente studio è giustificata dal più basso numero di Prandtl considerato (0.0321).

4.6. Conclusioni per $AR=1$

Per Gr fino a $\sim 10^7$ il moto è stazionario e mostra una simmetria bilaterale destra sinistra. Per $Gr \approx 3 \cdot 10^7$ si rompe la simmetria spaziale e si ottiene un tipo di moto laminare stazionario. Per $Gr \approx 5 \cdot 10^7$ il moto asimmetrico diviene periodico. Infine, per $Gr \geq 10^8$, si predice il moto caotico; le medie dei campi di moto e di temperatura sono ancora marcatamente asimmetriche per $Gr = 10^8$, ma ritornano a simmetria bilaterale per Gr maggiore (10^9), in corrispondenza di turbolenza bidimensionale pienamente sviluppata.

Il comportamento di cui sopra mostra l'esistenza di una biforcazione, con rottura di simmetria, per $10^7 < Gr < 3 \cdot 10^7$; di una successiva biforcazione a moto periodico per $3 \cdot 10^7 < Gr < 5.4 \cdot 10^7$; e di una transizione finale al moto caotico per $5.4 \cdot 10^7 < Gr < 10^8$, forse passando attraverso soluzioni quasi periodiche.

Gli stati stazionari con rottura di simmetria spaziale, osservati per $Gr = 3 \cdot 10^7$, possono interpretarsi come dovuti alla sovrapposizione della soluzione base simmetrica tipica dei bassi Gr con una perturbazione anti-simmetrica di lunghezza d'onda adimensionale ~ 1 (come nel caso $AR=4$), ma stazionaria nel tempo (avente cioè velocità di propagazione nulla).

In maniera analoga a quanto visto per la cavità snella, si può interpretare il moto periodico come la sovrapposizione di una perturbazione a onda viaggiante anti-simmetrica sul campo di moto base asimmetrico. L'onda viaggiante ha una lunghezza d'onda verticale di $\sim 2/3$ e una velocità di propagazione di ~ 1.6 . La natura della transizione a moto periodico, quindi, differisce da quella osservata per la cavità snella (dove era associata alla crescita della prima perturbazione) e, infatti, è caratterizzata da una frequenza adimensionale molto diversa.

Si sono osservati anche fenomeni di isteresi, una riduzione della densità di generazione interna di potenza di un ordine di grandezza dal moto di caos incipiente che si stabilisce per $Gr = 10^8$ non riporta alla soluzione simmetrica predetta per $Gr = 10^7$, ma ad una soluzione asimmetrica differente. La parità della soluzione dipende dal transitorio percorso cioè se si impone una riduzione a gradino o a rampa. Solamente con una riduzione di due ordini di grandezza partendo sempre dal caso $Gr = 10^8$, si ripristina la soluzione laminare stazionaria già trovata per il caso $Gr = 10^6$.

Per numeri di Grashof oltre $\sim 10^6$, il coefficiente di attrito mediato lungo le pareti verticali diminuisce approssimativamente con $Gr^{-1/3}$ (come nella cavità di $AR=4$), mentre il numero di Nusselt cresce approssimativamente con $Gr^{1/7}$, cioè un po' meno che nella cavità snella.

5. Risultati per $AR=0.25$

Facendo seguito agli studi precedenti per cavità snella (capitolo 3) e quadrata (capitolo 4), le simulazioni sono state estese per ad cavità piatta ($AR=0.25$). Il numero di Grashof, Gr , definito sempre sulla base della dimensione orizzontale D , è stato fatto variare da 10^6 a 10^{11} . Per Gr fino a 10^9 il moto è stazionario e mostra simmetria bilaterale. Per $Gr=10^{10}$ si viene predetto un moto periodico, mentre per $Gr=10^{11}$ si ottiene un moto caotico. Per gli ultimi due casi le medie temporali continuano a mostrare un simmetria bilaterale destra sinistra.

Per questa cavità appiattita, il trasporto convettivo di energia ha una grande influenza sullo scambio di calore anche per i regimi stazionari. Come si vedrà il numero di Nusselt cresce approssimativamente con $Gr^{1/5}$, cioè in modo più marcato che per le altre configurazioni. Il dominio di calcolo e la nomenclatura sono riportati in figura 5.1a.

5.1 Moto stazionario

Per $Gr \leq 3 \cdot 10^9$, il moto si attesta ad una soluzione stazionaria con simmetria bilaterale. Il comportamento di alcune grandezze durante il transitorio iniziale che porta allo stato stazionario, è mostrato in figura 5.1b e 5.2. La figura 5.1b riporta la velocità verticale nei due punti di monitoraggio P1 e P4 per quattro valori del numero di Grashof ($Gr=10^6, 10^7, 10^8, 10^9$) che corrispondono a quattro soluzioni stazionarie simmetriche.

Per i numeri di Grashof più bassi ($10^6, 10^7$) è evidente per entrambi i punti un approccio regolare di tipo esponenziale allo stato stazionario. Per $Gr=10^8$ e 10^9 si può osservare nel punto P4 (che si trova nella regione centrale in alto, dove il fluido ascendente è costretto dalla parete a cambiare direzione), un overshoot sulla velocità accompagnato da un'oscillazione smorzata. Oscillazioni smorzate senza overshoot si osservano per v nel punto P1 ai più alti Gr .

La figura 5.2 riporta le temperature media (a) e massima (b) in funzione del tempo. Come già osservato nei capitoli 3 e 4, il rateo di crescita iniziale della temperatura nella cavità è lo stesso per tutti i punti, ed è dato, in termini adimensionali, da $\partial T / \partial t = (32\pi\sqrt{2}) / (Pr\sqrt{Gr})$ così che, nella formulazione adimensionale qui usata, la pendenza decresce al crescere di Gr . Raggiunte le condizioni stazionarie, il massimo di temperatura è più alto per $Gr=10^6$, per il quale si ottiene quasi esattamente il valore conduttivo a causa della debole influenza della convezione sullo scambio termico. Non si nota alcuna stratificazione termica verticale nella regione centrale, e il fluido caldo non si accumula nella parte alta della cavità, come osservato nei precedenti casi, $AR=1$ e 4 , cosicché T_{max} non supera mai 1 e la temperatura media decresce monotonicamente con Gr . $\langle T \rangle$ è circa il 25% del valore puramente conduttivo per $Gr=10^9$.

La figura 5.3 mostra le distribuzioni della funzione di corrente (a) e della temperatura (b) per i

casi stazionari studiati. Si può osservare dal grafico (a) che la forma delle celle di circolazione è più squadrata per i più bassi numeri di Grashof. Nei campi di temperatura (b) l'aumento progressivo dell'influenza della convezione è reso evidente dalla deformazione delle isoterme. Ciò si traduce in una stratificazione termica verticale nella regione intermedia fra la colonna ascendente e gli strati limite discendenti per i più alti numeri di Grashof.

5.2 Moto periodico

Per numero di Grashof pari a 10^{10} si è ottenuta una soluzione perfettamente periodica. La figura 5.4 riporta il comportamento in funzione del tempo della velocità verticale v (a) nei punti di monitoraggio P1 e P2 e della temperatura media e massima (b). A seguito di un transitorio iniziale abbastanza simile a quello riportato per le soluzioni stazionarie a $Gr=10^8$ e 10^9 (si veda la figura 5.1b), per $t \approx 10$ il moto si destabilizza e dà luogo a perfette oscillazioni periodiche a partire da $t \approx 30$. La frequenza delle oscillazioni è $\sim 1/0.71 \approx 1.4$ (in unità τ^{-1}_0). Le oscillazioni sono regolari nella temperatura massima nella figura 5.4b. e sono quasi del tutto assenti nella temperatura mediata nello spazio $\langle T \rangle$.

La dinamica del moto periodico è mostrata in figura 5.5. Le istantanee successive sono relative a condizioni di regime periodico stabilizzato. L'intervallo di tempo (adimensionale) fra i fotogrammi è ~ 0.1 , così che la sequenza copre approssimativamente un periodo. Il meccanismo di base per le oscillazioni autosostenute sembra legato alla destabilizzazione idrodinamica del margine interno dei due dei due strati limite orizzontali superiori, con la produzione di onde e rulli che viaggiano in direzione orizzontale verso la pareti verticali esterne. I vortici hanno lo stesso verso di rotazione delle celle di circolazione principali e somigliano alle instabilità di Tollmien-Schlichting osservate al confine degli strati limite verticali in cavità differenzialmente scaldate. Si possono osservare inoltre rulli controrotanti nei pressi degli angoli superiori, della cavità, e un moto di sbandieramento ("flapping") degli strati limite orizzontali superiori. Si nota inoltre che istante per istante viene mantenuta una perfetta simmetria bilaterale.

Questa situazione è qualitativamente differente da quella vista per $AR=4$, caratterizzata da rulli discendenti, e differisce anche da quella descritta per $AR=1$, dove le perturbazioni erano sovrapposte a un campo di moto base asimmetrico

Nella figura 5.6 è mostrata una sequenza temporale della distribuzione della temperatura per questo stesso caso. Le onde viaggianti orizzontali qui non sono evidenti, poiché le oscillazioni sono smussate dall'alta diffusività termica del metallo liquido. Solamente piccole oscillazioni attorno al campo mediato nel tempo sono presenti per la temperatura, come è evidente da un paragone tra le istantanee in figura 5.6 e la media temporale riportata in figura 5.7b.

La figura 5.7a riporta la funzione di corrente mediata nel tempo che mostra una perfetta simmetria bilaterale.

5.3 Moto caotico

Per $Gr=3\cdot 10^{10}$ e 10^{11} si sono ottenute soluzioni caotiche. La figura 5.8 riporta il comportamento dipendente dal tempo della velocità verticale v nei punti di monitoraggio P1 e P4 (a) e della temperatura massima e media (b) per il caso a più alto Gr (10^{11}). A seguito di un breve transitorio iniziale, il moto rapidamente si destabilizza ed evolve verso un comportamento caotico con grandi fluttuazioni di velocità, specialmente nella regione superiore della cavità (punto P4). Come usuale per un fluido a questo basso numero di Prandtl, le oscillazioni sono fortemente smorzate nella temperatura massima, e sono quasi completamente assenti nella temperatura mediata nello spazio $\langle T \rangle$ (figura 5.8b).

Una sequenza temporale del campo di moto per lo stesso caso è mostrata in figura 5.9 nella forma di mappe della funzione di corrente. L'intervallo di tempo adimensionale fra le istantanee è ~ 0.2 . Nel campo di moto istantaneo la simmetria bilaterale destra-sinistra è completamente perduta ed il moto caotico è chiaramente indicato dalla forma irregolare delle linee di corrente. Gli strati limite superiori, che hanno origine dalla colonna centrale ascendente, si separano dopo breve distanza dalla parete superiore adiabatica e si riattaccano su di essa soltanto in prossimità degli angoli, determinando così ampie regioni di circolazione contro-rotanti e di fluido quasi stagnante adiacente alla parete superiore. La separazione iniziale degli strati limite della parete superiore è probabilmente dovuta all'impatto del getto centrale contro la parete superiore. Le regioni di stagnazione in prossimità della parete superiore sono anche associate con i massimi di temperatura, come chiaramente mostrato nella corrispondente sequenza temporale dei campi di temperatura in figura 5.10. I campi mediati nel tempo sono mostrati in figura 5.11; la simmetria bilaterale destra-sinistra è chiaramente recuperata sia dal campo di moto che dalla distribuzione di temperatura. I massimi di \bar{T} vicino la parete superiore sono ancora marcati nelle medie temporali, mostrando che le regioni di circolazione sono strutture permanenti del moto a tutti gli istanti.

5.4 Attrito di parete e scambio termico.

La figura 5.12a riporta i profili mediati nel tempo del coefficiente di attrito C_f lungo le pareti verticali per i casi studiati relativi ad $AR=0.25$.

Contrariamente a quanto visto per gli altri due fattori di forma, in cui si trova un picco di C_f in prossimità della sommità della cavità, dove gli strati limite orizzontali cambiano direzione incontrando le pareti fredde, nel presente caso si riscontra una sostanziale simmetria alto-basso per tutti i valori di Gr . Inoltre i valori sono molto minori di quelli trovati negli altri AR .

I valori massimi di C_f (~ 0.5) e l'andamento meno uniforme si riscontrano per il più basso valore di Gr studiato (10^6), mentre, come già notato per gli altri fattori di forma, all'aumentare del numero di Grashof si ottengono profili sempre più uniformi.

La figura 5.12b mostra $\langle C_f \rangle$, cioè il valore di C_f mediato lungo y , in funzione di Gr per l'intero campo studiato. Ai più bassi valori del numero di Grashof i valori di $\langle C_f \rangle$ tendono ad un valore limite di ~ 0.3 che è molto minore di quelli trovati per i precedenti fattori di forma (~ 1.7 per $AR=1$ e ~ 2.63 per $AR=4$).

Per $Gr > 10^7$, $\langle C_f \rangle$ varia approssimativamente con $Gr^{-1/3}$ come negli altri casi.

La figura 5.13a riporta i profili di q'' alla parete per tutti i casi studiati; per i casi non stazionari sono riportate le medie temporali.

L'andamento delle curve è analogo a quello osservato per gli altri AR : si ha una distribuzione abbastanza piatta per i valori di Gr più bassi, quando la convezione è trascurabile, mentre sono presenti notevoli variazioni per i più alti Gr . I valori di picco (~ 1.6) si raggiungono in prossimità della zona in cui il fluido caldo, proveniente dagli strati limite che lambiscono le pareti orizzontali superiori, incontra le pareti fredde, mentre valori bassi si ottengono in corrispondenza della separazione degli strati limite discendenti dalle pareti verticali.

Come nel caso $AR=1$ e contrariamente al caso $AR=4$ non vi è una distribuzione piatta in prossimità della regione centrale della cavità.

Una rappresentazione grafica dei due numeri di Nusselt Nu_1 e Nu_2 in funzione del numero di Grashof è data in figura 5.13b. Per questo valore di AR , $Nu_1=1/T_{max}$ e $Nu_2=2/3(1/\langle \bar{T} \rangle)$ tendono quasi a coincidere per tutti i casi eccetto che per quello periodico ($Gr=10^{10}$). Valori attorno ad 1 (pura conduzione) sono ottenuti nel campo stazionario per i più bassi numeri di Grashof ($Gr=10^6, 10^7$). Non si osservano valori < 1 , contrariamente a quanto osservato per $AR=4$ e 1. Uno scambio di calore convettivo significativo è ottenuto già per $Gr=10^9$ ben all'interno del campo stazionario ($Nu \approx 2.6$). Per $Gr > 10^7$ la dipendenza di Nu da Gr può essere descritta da una legge di potenza con esponente $1/5$. La pendenza della curva $Nu(Gr)$ è quindi lievemente maggiore di quella ottenuta per le due configurazioni precedenti ($\sim 1/6$ e $\sim 1/7$ rispettivamente per $AR=4$ e $AR=1$).

5.5 Conclusioni per $AR=0.25$

Si sono condotte simulazioni numeriche per la cavità con generazione interna di potenza per $AR=0.25$ e Gr compreso fra 10^6 e 10^{11} . Anche per questo fattore di forma si è trovata, al crescere del numero di Grashof, una sequenza di differenti regimi di moto: da stazionario a periodico e, infine, caotico.

La transizione da moto stazionario a non stazionario avviene a Gr relativamente elevati ($3 \cdot 10^9 \div 10^{10}$) ed è associata con l'instabilità idrodinamica degli strati limite della parete superiore che si traduce in un moto secondario periodico con perturbazioni viaggianti orizzontalmente verso l'esterno e in un "flapping" periodico degli stessi strati limite. È interessante notare che il moto periodico mantiene istante per istante la simmetria bilaterale.

Un moto caotico viene predetto per $Gr \geq 3 \cdot 10^{10}$; mentre le caratteristiche generali del moto sono

simili a quelle osservate per il moto periodico, le oscillazioni sono in questo caso altamente irregolari e il campo di moto istantaneo non possiede simmetria bilaterale. La transizione al moto caotico sembra avvenire a causa della destabilizzazione del moto della colonna ascendente centrale che inizia a sbandierare rompendo l'istantanea simmetria del campo di moto. Comunque la media temporale di lungo periodo rimane caratterizzata da simmetria bilaterale.

Il coefficiente di attrito mediato lungo la parete verticale varia con $Gr^{-1/3}$ come per gli altri AR .

Il numero di Nusselt cresce con Gr più rapidamente che negli altri fattori di forma e raggiunge valori relativamente elevati (~ 6.5) al più alto Gr esaminato (10^{11}).

6. Confronto con modelli di turbolenza

Come discusso nei capitoli precedenti, nelle condizioni geometriche e termiche (dimensioni, fattore di forma, generazione interna di potenza) che ci aspettiamo di trovare in alcuni sistemi ingegneristici reali, il moto in convezione naturale risultante è caotico. Per una geometria bidimensionale ed estremamente semplificata, come quella studiata in questo lavoro, si possono ottenere soluzioni numeriche dirette che risolvono esplicitamente la dipendenza spazio-temporale dei campi di moto e di temperatura caotici, ma per configurazioni più realistiche tridimensionali e geometricamente più complesse, la simulazione diretta diviene non sostenibile a causa delle elevate risorse di calcolo, e si devono impiegare modelli di turbolenza.

Purtroppo, la maggior parte dei modelli sviluppati per convezione forzata e turbolenza di parete non garantiscono risultati affidabili per il presente problema, nel quale:

- a) le componenti dipendenti dal tempo dei campi di moto e di temperatura sono caratterizzate da poche frequenze significative piuttosto che da un vero spettro turbolento sviluppato;
- b) la produzione di turbolenza è in gran parte dovuta alle forze di galleggiamento, che sono distribuite in tutto il volume della cavità;
- c) è possibile la compresenza di regioni sostanzialmente laminari e regioni altamente caotiche.

Confronti presentati in letteratura [Nobile, 1993] hanno mostrato che i modelli di turbolenza della famiglia k - ϵ incontrano difficoltà anche per cavità differenzialmente scaldate a $Pr \sim 1$ ed elevato numero di Grashof, particolarmente per quel che riguarda la posizione e l'intensità delle regioni ad elevata turbolenza e la distribuzione del coefficiente di scambio termico lungo le pareti attive.

I risultati delle simulazioni dirette descritte nei capitoli precedenti in regime caotico, saranno paragonati in questo capitolo ai risultati ottenuti con modelli di turbolenza della famiglia k - ϵ . Gran parte dei risultati sono relativi al caso $AR=4$. Saranno presi in considerazione due differenti modelli: il modello detto "ReNormalization Group" (RNG) k - ϵ [Yakhot e Orszag, 1986], il modello di turbolenza k - ϵ a basso numero di Reynolds di Launder e Sharma [1974].

Si noti che il modello k - ϵ standard non è applicabile al presente problema in quanto richiede che il substrato viscoso sia escluso dalla griglia di calcolo e sia descritto da funzioni di parete; per turbolenza poco sviluppata tale requisito taglierebbe fuori dalla simulazione vera e propria una regione rilevante del dominio di calcolo e porterebbe a risultati poco significativi.

6.1 Equazioni dei modelli

Le equazioni dimensionate che regolano la fisica del problema per il moto di un fluido incomprimibile, usando la approssimazione di Boussinesq per i termini di galleggiamento e assumendo condizioni di stato stazionario nelle medie, possono essere scritte per tutti i modelli:

$$\frac{\partial V_i}{\partial X_j} = 0 \quad (6.5)$$

$$V_j \frac{\partial V_i}{\partial X_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} (\nu + \nu_t) \frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} g \beta \vartheta \quad (6.6)$$

$$V_j \frac{\partial \vartheta}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \vartheta}{\partial X_j} + \frac{q}{\rho c_p} \quad (6.7)$$

nelle quali $\beta = -(1/\rho)\partial\rho/\partial\vartheta$, δ_{ij} = delta di Kronecker, essendo stata adottata la convenzione di Einstein della somma implicita su indici ripetuti.

La forma dimensionata delle equazioni è qui usata per evitare la adimensionalizzazione delle quantità turbolente, che farebbe comparire nuovi gruppi adimensionali di dubbio significato fisico e per i quali vi è scarso riscontro in letteratura. Si è preferito, quindi, scalare *a posteriori* i risultati più significativi, come l'energia cinetica turbolenta k e gli sforzi di Reynolds.

Nelle equazioni (6.7), $\alpha_t = \nu_t/\sigma_t$, essendo σ_t il numero di Prandtl turbolento per il quale si è scelto il valore di 0.9 [Yakhot *et al.*, 1987]. La viscosità turbolenta ν_t viene fornita in tutti i casi dalla seguente equazione:

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6.8)$$

in cui f_μ è un termine di smorzamento che dipende dal modello, si veda oltre, mentre k ed ε sono l'energia cinetica turbolenta p.u.m. e il suo tasso di dissipazione che sono governati dalle equazioni del trasporto:

$$V_j \frac{\partial k}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right] \frac{\partial k}{\partial X_j} + \nu_{\text{eff}} (S + G) - (\varepsilon + D) \quad (6.9)$$

$$V_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} + C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_{\text{eff}} (S + C_3 G) - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E \quad (6.10)$$

Nelle (6.9)-(6.10) il termine S tiene conto della produzione di energia turbolenta dovuta a shear ed è dato da $S = 2S_{ij}S_{ij}$, , essendo $S_{ij} = (\partial V_i/\partial X_j + \partial V_j/\partial X_i)/2$ il tensore della velocità di deformazione (strain rate), mentre il termine G tiene conto della produzione di energia turbolenta dovuta alle forze di galleggiamento, ed è dato in questo caso $(g\beta/\sigma_t) \partial\vartheta/\partial y$. I dettagli delle equazioni (6.8)-(6.10) dipendono dallo specifico modello usato.

Nel modello RNG (Re-Normalization Group) k - ε [Yakhot e Orszag, 1986], $f_\mu = f_1 = f_2 = 1$; $D = E = 0$; e le costanti del modello assumono i valori:

$$C_\mu = 0.085; C_2 = 1.92; C_3 = 0; \sigma_k = \sigma_\varepsilon = 0.718 \quad (6.11)$$

mentre C_1 è espresso in funzione delle grandezze locali del moto mediante la:

$$C_1 = C_{1,0} - \frac{\eta(1 - \eta/\eta_0)}{1 + b\eta^3} \quad (6.12)$$

in cui $C_{1,0}=1.42$; $\eta_0=4.38$; $b=0.015$; e $\eta=S^{0.5}k/\varepsilon$. Questa dipendenza funzionale di C_1 ed i valori usati per le costanti in (6.11), sono le uniche differenze rispetto al modello k - ε standard [Launder e Spalding, 1974]. Una caratteristica desiderabile del modello RNG, al contrario del k - ε standard, è che esso dia una ragionevole predizione dei livelli di turbolenza nella regione di parete, anche in assenza di termini di smorzamento (“damping”) vicino alla stessa, e permette quindi l’uso di griglie fini che risolvano il substrato viscoso. Lo smorzamento turbolento nel substrato viscoso è ottenuto principalmente attraverso la variazione di C_1 (e quindi del termine di sorgente nell’equazione di ε); inoltre, η dipende solamente dalla produzione dovuta a shear.

Nel modello di Launder e Sharma [1974] le costanti fondamentali sono come quelle del modello k - ε standard:

$$C_\mu=0.09; C_1=1.44; C_2=1.92; C_3=0; \sigma_k=1.00; \sigma_\varepsilon=1.3 \quad (6.13)$$

mentre i termini D ed E nelle equazioni. (6.9)-(6.10) possono essere espressi (nella nostra notazione) come:

$$D = 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial X_j} \right)^2 \quad (6.14)$$

$$E = 2\nu\nu_t \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_k} \right)^2 \quad (6.15)$$

ed i fattori correttivi f_μ, f_1, f_2 sono dati da:

$$f_\mu = \exp [-3.4 / (1 + R_T/50)^2] \quad (6.16)$$

$$f_1 = 1 \quad (6.17)$$

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp (-R_T^2) \quad (6.18)$$

con $R_T=k^2/(\nu\varepsilon)$ (numero di Reynolds turbolento). In questo caso, la correzione di parete della viscosità turbolenta è introdotta principalmente a posteriori attraverso il coefficiente f_μ .

Le condizioni al contorno per l’energia turbolenta sono state semplicemente $k=0$ sulle pareti per entrambi i modelli. Per ciò che riguarda il rateo di dissipazione ε , la condizione al contorno è $\partial\varepsilon/\partial n=0$ alle pareti (con n direzione ortogonale alla parete) per il modello RNG k - ε ; $\varepsilon=0$ alle pareti per il modello LS (nel quale la dissipazione totale $\varepsilon+D$).

Tutti i modelli, in linea di principio, sono in grado di predire sia la completa laminarizzazione del moto, che la compresenza di regioni laminari e turbolente.

In tutti i casi, si sono imposte sulla mezzeria verticale condizioni di simmetria e la simulazione si è estesa soltanto a metà del dominio. Lo schema QUICK di discretizzazione spaziale è stato usato per tutte le simulazioni con modelli di turbolenza. Le griglie di calcolo sono state scelte coincidenti con quelle usate nelle simulazioni dirette ai rispettivi Gr ($AR=4$: $92/2 \times 160$; $AR=1$: $128/2 \times 128$; $AR=0.25$: $160/2 \times 80$)

6.2 Risultati

Le figure 6.1a, 6.2a e 6.3a si riferiscono rispettivamente ad $AR=4$, 1 e 0.25 e confrontano la funzione di corrente ottenuta mediante simulazione diretta (per $Gr=3.79 \cdot 10^8$, 10^9 e 10^{11} , rispettivamente) con le corrispondenti predizioni del modello RNG $k-\varepsilon$. Solo per $AR=4$, figura 6.1, sono riportati anche i risultati del modello LS, poichè quando si è usato tale modello per valori più bassi di AR è risultato impossibile ottenere soluzioni stazionarie dotate di accettabile convergenza, anche facendo variare i fattori di sottorilassamento, sostituendo lo schema SIMPLEC con SIMPLE e, infine, sostituendo lo schema QUICK con quello upwind nella discretizzazione dei termini convettivi.

In tutti i casi, la forma generale e l'intensità della circolazione sono predette in modo accettabile. Nel caso $AR=4$, è da notare che la media temporale della simulazione diretta è ancora affetta da una residua asimmetria, come si è evidenziato riportando per questo caso l'intero dominio di calcolo; il modello LS sottostima leggermente ($\sim 15\%$) l'intensità della circolazione e predice una struttura a due celle. Il modello RNG $k-\varepsilon$ predice correttamente l'intensità della circolazione e prevede in pratica una cella singola per ciascuna metà della cavità.

Nel caso $AR=1$, il modello RNG $k-\varepsilon$ prevede una cella di circolazione più schiacciata in basso che la simulazione diretta.

Infine nel caso $AR=0.25$ la principale discrepanza fra RNG $k-\varepsilon$ e DS è che il modello di turbolenza predice una cella principale di circolazione di forma più semplice e una zona stagnante presso la parete superiore meno estesa verticalmente rispetto alla simulazione diretta. La posizione della regione di riattacco presso l'angolo superiore sinistro è correttamente riprodotta.

Le figure 6.1b, 6.2b e 6.3b riportano per gli stessi casi le corrispondenti distribuzioni di temperatura. Qui le discrepanze fra simulazione diretta e modelli di turbolenza sono più vistose.

Nel caso $AR=4$, sia il modello RNG $k-\varepsilon$ che il modello LS sovrastimano la stratificazione orizzontale e i valori massimi di temperatura.

Una certa sovrastima di T_{\max} da parte del modello RNG si osserva anche per il caso $AR=1$.

Per $AR=0.25$, si osserva, in analogia a quanto già visto per il campo di moto, una certa semplificazione della struttura del campo termico predetto dal modello RNG $k-\varepsilon$, che inoltre sottostima il picco di temperatura. Entrambe queste caratteristiche della simulazione RNG sono

probabilmente legate alla sottostima dell'effetto di "rimbalzo" della colonna ascendente centrale nell'impatto con la parete superiore, e dalla corrispondente sovrastima della larghezza della colonna stessa.

La figura 6.4 riporta i profili del flusso termico q'' sulla parete isoterma, normalizzato al flusso medio imposto $qD/2$. L'accordo è discreto in tutti i casi.

Per $AR=4$ entrambi i modelli sovrastimano il picco di q'' osservato nella regione alta della parete, in corrispondenza alla zona d'attacco della corrente calda ascendente; la sovrastima è maggiore (~35%) per il modello RNG.

Il massimo di q'' è sovrastimato (di circa il 20%) dal modello RNG anche per $AR=1$, mentre l'accordo sul valore di picco è buono per il caso $AR=0.25$, nel quale, tuttavia, la simulazione diretta prevede una fascia centrale a q'' uniforme che manca nei risultati basati sul modello di turbolenza RNG.

I risultati globali relativi allo scambio termico ottenuti per diversi valori di AR e Gr sono riassunti nella figura 6.5. La grandezza riportata in ordinate è il secondo numero di Nusselt, $Nu_2=2/3(1/\langle \bar{T} \rangle)$, già introdotto e discusso nei capitoli precedenti.

Limitatamente al caso $AR=4$, per il quale sono stati eseguiti confronti con il modello RNG $k-\epsilon$ a diversi Gr , si può osservare che l'intero andamento di Nu_2 è riprodotto in modo soddisfacente dal modello di turbolenza.

Per i casi $AR=1$ e $AR=0.25$ si sono simulati con il modello RNG $k-\epsilon$ solo i casi descritti in precedenza; l'accordo su Nu_2 con i risultati della simulazione diretta è buono per $AR=1$, $Gr=10^9$ mentre nel caso $AR=0.25$, $Gr=10^{11}$ il modello RNG $k-\epsilon$ dà una leggera sovrastima di Nu_2 (circa il 15%)

Le distribuzioni del modulo del vettore flusso termico turbolento, o di Reynolds, di componenti $\rho c_p \langle U'T' \rangle$ e $\rho c_p \langle V'T' \rangle$, predetti dalla simulazione diretta sono confrontati nelle figure 6.6÷6.8 con i corrispondenti termini $c_p \mu_t / \sigma_t |\nabla T|$ calcolati mediante il modello RNG $k-\epsilon$. Le figure riportano anche le corrispondenti distribuzioni del modulo del flusso termico molecolare, $\chi |\nabla \bar{T}|$, e di quello totale (molecolare + Reynolds). Tutti i flussi termici sono resi adimensionali dividendoli per il flusso termico medio $qD/2$.

Osservazioni diverse vanno fatte per i diversi valori di AR .

Per il caso $AR=4$ (figura 6.6) si nota che, sia per la simulazione diretta che per il modello di turbolenza, i flussi di Reynolds sono dello stesso ordine di grandezza dei flussi molecolari, e quindi contribuiscono direttamente in modo rilevante allo scambio termico. Si nota inoltre che nella simulazione diretta la irregolarità residua viene esaltata, rispetto a quella osservata per grandezze medie come Ψ e T , in quanto la grandezza in esame è un momento di secondo ordine di fluttuazioni temporali; sarebbero quindi necessarie delle medie estese ad un tempo maggiore. Il modello RNG $k-\epsilon$ predice correttamente la zona in cui si hanno i massimi flussi turbolenti e la loro intensità.

Per gli altri due casi (figure 6.7 e 6.8), invece, il flusso turbolento è molto più piccolo di quello molecolare. Quindi, contrariamente a quanto avviene nel caso precedente, il contributo della turbolenza allo scambio termico avviene indirettamente attraverso la modifica del campo di moto e quindi dei termini convettivi. La simulazione diretta predice i massimi del flusso di Reynolds in prossimità della zona centrale, dove si ha la massima turbolenza dovuta, nel caso $AR=1$, alla rotazione del centro del rullo e, nel caso $AR=0.25$, al “flapping” degli strati limite orizzontali superiori. Il modello RNG $k-\varepsilon$, invece, predice tali i massimi in prossimità dello strato limite di parete verticale. Si riscontra così una severa discrepanza tra le previsioni del modello e i risultati ottenuti mediante simulazione diretta. Tale discrepanza è probabilmente riconducibile alle ragioni discusse nel paragrafo introduttivo sui modelli di turbolenza: la produzione di turbolenza nei casi studiati è in gran parte dovuta alle forze di galleggiamento uniformemente distribuite nell’intera cavità, mentre i modelli di turbolenza sono ottimizzati per simulare produzione di turbolenza da shear, in particolare in corrispondenza a strati limite di parete. Questo disaccordo deve essere tenuto in considerazione nel caso in cui si volesse indagare su fenomeni legati alle fluttuazioni più che ai valori medi delle varie grandezze (ad esempio sulla fatica termica a cui è sottoposta la parete verticale), poiché il modello RNG $k-\varepsilon$ darebbe un valore eccessivo per le componenti fluttuanti

Va notato comunque che, a causa dell’apporto trascurabile dato dal flusso turbolento al flusso termico totale nei casi $AR=1$ e $AR=0.25$, le grandezze termiche medie vengono correttamente predette dal modello RNG $k-\varepsilon$.

7. Conclusioni

Si sono condotte simulazioni numeriche bidimensionali per convezione naturale in cavità scaldate internamente con fluido di lavoro a basso numero di Prandtl (0.0321). Si sono considerati tre diversi fattori di forma: 4 (cavità snella), 1 (cavità quadrata), 0.25 (cavità appiattita).

Al variare del numero di Grashof in un ampio intervallo (almeno quattro ordini di grandezza) si sono osservate transizioni da moto stazionario a periodico e infine a caotico per tutti i fattori di forma. Il moto base che si ottiene per i più bassi Gr è qualitativamente simile per tutti i fattori di forma e comprende una colonna ascendente centrale e due strati limite discendenti lungo le pareti laterali, che delimitano due celle di circolazione controrotanti simmetriche. Comunque, il meccanismo di transizione ed i conseguenti tipi di moto sono risultati sostanzialmente diversi per i tre casi.

Nelle cavità snelle ($AR=4$), la transizione da moto stazionario a periodico (biforcazione di Hopf) avviene per $Gr \approx 3 \cdot 10^5$ ed è associata alla crescita di onde viaggianti antisimmetriche che scendono lungo la cavità, in buon accordo con le predizioni della teoria di stabilità lineare. Il moto periodico risultante è caratterizzato da rulli sfalsati discendenti con una media temporale del campo di moto risultante simmetrica, una velocità adimensionale di ~ 0.2 e una lunghezza d'onda di ~ 1 . Il moto periodico, a sua volta, diviene instabile per $Gr \approx 10^6$. Il moto caotico mantiene la stessa struttura a rulli sfalsati, ma è irregolare sia nello spazio che nel tempo, mentre le medie temporali di lungo periodo mostrano una tendenza a recuperare, ai più alti Gr , la simmetria bilaterale.

Nelle cavità quadrate ($AR=1$) il moto base simmetrico presenta dapprima una biforcazione con rottura di simmetria spaziale per $Gr \approx 1 \div 3 \cdot 10^7$, che porta a un campo di moto stazionario asimmetrico. Probabilmente, questo tipo di moto si può interpretare, lontano dalle pareti orizzontali, come la sovrapposizione di un'onda stazionaria antisimmetrica di lunghezza d'onda ~ 1 (nella consueta formulazione adimensionale qui usata basata su D) su di un moto base analogo a quello trovato analiticamente con l'ipotesi di moto parallelo. Quest'ultima perturbazione è analoga a quella che dà luogo alla biforcazione di Hopf nella cavità snella. A sua volta, il moto periodico che si stabilisce per $Gr \approx 5 \cdot 10^7$ si può interpretare come l'ulteriore sovrapposizione, sul moto base asimmetrico, di una perturbazione ad onda viaggiante antisimmetrica di lunghezza d'onda $\sim 2/3$ e velocità di propagazione ~ 1.6 . Pertanto si deve notare che il moto periodico nella presente configurazione è di natura diversa rispetto a quello osservato nella cavità allungata (dove esso era associato alla crescita della prima perturbazione) ed infatti è caratterizzato da una frequenza molto diversa (~ 2.4 contro ~ 0.2).

Per lo stesso valore di AR , l'ulteriore incremento del numero di Grashof conduce ad un moto caotico. La simmetria bilaterale nelle medie di lungo periodo è recuperata al più elevato valore di Gr studiato (10^9), mentre le medie temporali sono ancora asimmetriche a $Gr=10^8$. Nel moto caotico, la frequenza dominante adimensionale è simile a quella del moto periodico (~ 2).

Meccanismi di transizione differenti si sono evidenziati per la cavità appiattita ($AR=0.25$). Il

moto base stazionario a simmetria bilaterale che si realizza per $Gr \leq 3 \cdot 10^9$ è destabilizzato dalla crescita di instabilità idrodinamiche negli strati limite della parete superiore. Queste instabilità si muovono simmetricamente verso l'esterno in direzione prevalentemente orizzontale attraverso la cavità, dando luogo per $Gr = 10^{10}$ a soluzioni periodiche perfettamente simmetriche sia nelle medie temporali che istante per istante. La frequenza delle perturbazioni è di ~ 1.4 (adimensionale), valore diverso da quelli trovati per $AR=1$ (~ 2.4) e per $AR=4$ (~ 0.2).

Per numeri di Grashof maggiori ($Gr \geq 3 \cdot 10^{10}$) il comportamento perfettamente periodico cede il passo a un regime di moto caotico e la simmetria bilaterale è rotta dallo sbandieramento laterale della colonna ascendente centrale. Inoltre gli strati limite superiori si distaccano dalla parete a causa della elevata velocità con cui la colonna ascendente centrale impatta contro la parete stessa; di conseguenza, si sviluppano due regioni separate controrotanti in prossimità della parete superiore. In queste regioni stagnanti, viene raggiunto il massimo di temperatura dovuto alla generazione interna di potenza.

Un confronto tra i numeri di Nusselt basati su T_{\max} (Nu_1) e $\langle T \rangle$ (Nu_2) per i tre fattori di forma studiati ($AR=4, 1, 0.25$) è mostrato in figura 7.1. Si deve notare che, sebbene siano presenti diversi meccanismi di transizione, i numeri di Nusselt sono abbastanza simili per i vari AR , e differiscono significativamente soltanto per $Gr \approx 10^7$. La transizione a moto periodico e caotico avviene a differenti numeri di Grashof per $AR=4, 1, 0.25$, così che punti nel campo $Gr \approx 10^7 \div 10^9$ si riferiscono a situazioni completamente differenti. Ciò conferma che il numero di Grashof Gr basato su D (larghezza della cavità) è il parametro dominante per l'efficienza dello scambio termico.

Tuttavia, un confronto globale dei risultati per diversi valori del fattore di forma AR , mostra che la transizione a regimi di moto non stazionari e caotici si verifica ai diversi AR per valori molto diversi del numero di Grashof, il che dimostra una forte influenza di AR . La figura 7.2a riporta il numero di Grashof critico per la transizione da moto stazionario a periodico in funzione di AR . Sono riportati pure i risultati dell'analisi lineare di stabilità per cavità infinitamente snella e per il presente numero di Prandtl di 0.0321.

Si può osservare che i risultati per $AR=0.25, 1$ e 4 sono approssimativamente allineati in un diagramma Log-Log e seguono una legge di potenza con esponente -0.35 . Il valore ottenuto per $AR=4$ ($Gr \sim 2.8 \cdot 10^5$) è prossimo a quello ($\sim 10^5$) dedotto dall'analisi di stabilità lineare. Non sono disponibili in letteratura risultati confrontabili per il caso opposto di cavità infinitamente piatta con scambio termico dalle pareti laterali ($AR \rightarrow 0$, punti interrogativi nel grafico), ma si può arguire su basi fisiche che in questo caso il numero di Grashof critico per la perdita di stabilità della soluzione base deve divergere.

Poiché, fino a $AR \approx 4$, la curva di stabilità marginale in figura 7.2a mostra una pendenza prossima a -3 , si può concludere che, almeno in questo range, la transizione a moto dipendente dal tempo è controllata principalmente dal numero di Grashof basato sulla massima temperatura conduttiva e sulla *altezza* della cavità, $Gr_H = AR^3 Gr$, con una modesta influenza residua di AR . La

figura 7.2b riporta una mappa schematica dei regimi di moto in funzione di Gr_H e AR ; le linee tratteggiate indicano i casi prova per i quali si sono condotte simulazioni dirette, e regimi di moto differenti (stazionario simmetrico, stazionario asimmetrico, periodico, caotico) sono evidenziati mediante ombreggiature diverse. La transizione a moto periodico si verifica per $Gr_H \approx 2 \cdot 10^7$ nel caso $AR=4$, $Gr_H \approx 4 \cdot 10^7$ nel caso $AR=1$ e $Gr_H \approx 10^8$ nel caso $AR=0.25$. La transizione al moto caotico si verifica per $Gr_H \approx 6 \cdot 10^7$ nel caso $AR=4$, $Gr_H \approx 10^8$ nel caso $AR=1$ e $Gr_H \approx 3 \cdot 10^8$ nel caso $AR=0.25$. La transizione da stato stazionario simmetrico a stato stazionario asimmetrico si verifica per $Gr_H \approx 2 \cdot 10^7$ solo nel caso $AR=1$ e non si verifica affatto per altri valori del fattore di forma. Una ulteriore transizione, predetta dalle simulazioni numeriche solo per il caso di cavità quadrata (da moto caotico con medie temporali asimmetriche a moto caotico con medie temporali simmetriche) non è riportata per semplicità.

Risulta chiaro dal comportamento asintotico in Figura 7.2a che la dipendenza delle transizioni di regime da Gr_H non è una proprietà universale del moto e non può essere estesa a valori del fattore di forma più elevati di quello massimo (4) considerato in questo studio.

Infine, va ricordato che le presenti simulazioni *bidimensionali* non possono dare risposte circa la stabilità del moto in presenza di perturbazioni *tridimensionali*. Perciò, è possibile che i confini tra regimi di moto stazionari, periodici e caotici risultino notevolmente diversi in simulazioni tridimensionali; come pure è possibile che alcuni regimi, ad es. quello periodico, non si presentino affatto.

Bibliografia

Acharya, S. and Goldstein, R.J. (1985), Natural convection in an externally heated vertical or inclined square box containing internal energy sources. *ASME J. of Heat Transfer* **107**, 855-866.

Baker, L., Faw, R.E. and Kulacki, F.A. (1976), Post Accident Heat Removal—Part I: Heat transfer within an internally heated, nonboiling liquid layer. *Nuclear Science and Engineering* **61**, 222-230.

Barakat, H.A. (1965), Transient laminar free convection heat and mass transfer in two-dimensional closed containers containing distributed heat source. *ASME Paper* 65-WA/HT-28.

Bertin, H. and Ozoe, H. (1986), Numerical study of two-dimensional natural convection in a horizontal fluid layer heated from below, by finite element method: influence of Prandtl number. *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 439-449.

Boon-Long, P., Lester, T.W. and Faw, R.E. (1979), Convective heat transfer in an internally heated horizontal fluid layer with unequal boundary temperatures. *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 437-447.

Braunfurth, M.G., Skeldon, A.C., Juel, A., Mullin, T. and Riley, D.S. (1997), Free convection in liquid gallium. *J. Fluid Mechanics* **342**, 295-314.

Bui, V.A. and Dinh, T.N. (1996), Prediction of turbulent characteristics in a fluid layer with internal energy sources. *Proc. 2nd European Thermal-Sciences and 14th UIT National Heat Transfer Conference*, pp. 1365-1372.

Cheung, F.B. (1978), Correlation equation for turbulent thermal convection in a horizontal fluid layer heated internally and from below. *ASME J. Heat Transfer* **100**, 416-420.

Churbanov, A.G., Vabishchevich, P.N., Chudanov, V.V. and Strizhov, V.F. (1994), A numerical study of natural convection of a heat generating fluid in rectangular enclosures. *Int. J. Heat Mass Transfer* **37**, 2969-2984.

Daniels, P.G. and Jones, O.K. (1998), Convection in a shallow rectangular cavity due to internal heat generation. *Int. J. Heat Mass Transfer* **41**, 3979-3987.

De Socio, L.M., Misici, L. and Polzonetti, A. (1979), Natural convection in heat generating fluids in cavities. *ASME Paper* 79-HT-95.

Dinh, T.N. and Nourgaliev, R.R. (1996), Prediction of turbulent characteristics in a fluid layer with internal energy sources. *Proc. 2nd European Thermal-Sciences and 14th UIT National Heat Transfer Conference*, G.P. Celata, P. Di Marco and A. Mariani, eds., ETS, Milan, pp.843-850.

Dinh, T.N. and Nourgaliev, R.R. (1997), Turbulence modelling for large volumetrically heated liquid pools. *Nucl. Engng. and Des.* **169**, 131-150.

Farouk, B. (1988), Turbulent thermal convection in an enclosure with internal heat generation. *ASME J. Heat Transfer* **110**, 126-132.

Fiedler, H. and Wille, R. (1971), Wärmetransport bei freier Konvektion in einer horizontalen Flüssigkeitsschicht mit Volumenheizung, Teil 1: Integraler Wärmetransport. *Rep. Dtsch Forschungs-Versuchsanstalt Luft- Raumfahrt*, Inst. Turbulenzforschung, Berlin.

Fusegi, T., Hyun, J.M. and Kuwahara, K. (1992.a), Natural convection in a differentially heated square cavity with internal heat generation. *Numer. Heat Transfer* **21**(A), 215-229.

Fusegi, T., Hyun, J.M. and Kuwahara, K. (1992.b), Numerical study of natural convection in a differentially heated cavity with internal heat generation: effects of the aspect ratio. *ASME J. Heat Transfer* **114**, 773-777.

- Glueckler, E.L. and Baker, L., Jr. (1977), Post-accident heat removal in LMFBR's. *Proc. Symp. on the Thermal and Hydraulic Aspects of Nuclear Reactor Safety, Vol.2: Liquid Metal Fast Breeder Reactors*, O.C. Jones, Jr. and S.G. Bankoff, eds., ASME, New York, 285-324.
- Grötzbach, G. (1987), Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows. *Encyclopedia of Fluid Mechanics* **6**, 1337-1391, N.P. Chermisinoff, ed., Gulf Publishing Co., Houston.
- Grötzbach, G. (1990), Simulation of turbulent flow and heat transfer for selected problems of nuclear thermal-hydraulics. *Int. Conf. "Supercomputing in Nuclear Applications"*, Mito, Japan, March 12-16.
- Gudowski, W., ed. (1999), *The Status of Accelerator-Driven Systems (ADS)*. IAEA report, Vienna.
- Henkes, R.A.W.M. and Hoogendoorn, C.J. (1990), Bifurcation to unsteady natural convection for air and water in a cavity heated from the side. *Proc. 9th Int. Heat Transfer Conf.*, Jerusalem, Israel, Aug. 19-24, pp. 257-262.
- Henkes, R.A.W.M. and Le Quéré, P. (1996), Three-dimensional transition of natural-convection flows. *J. Fluid Mechanics* **319**, 281-303.
- Janssen, R. J. A. (1994), *Instabilities in natural convection flows in cavities*. PhD Thesis, Technical University of Delft, Delft. The Netherlands
- Janssen, R. J. A. and Henkes, R. A. W. (1993), Accuracy of finite-volume discretizations for the bifurcating natural-convection flow in a square cavity. *Numer. Heat Transfer* **24**(B), 191-207.
- Janssen, C.J. and Henkes, R.A.W. (1995), Influence of Prandtl number on instability mechanisms and transition in differentially heated square cavity. *J. Fluid Mechanics* **290**, 319-344.
- Kawara, Z., Kishiguchi, I., Aoki, N. and Michiyoshi, I. (1990), Natural convection in a vertical fluid layer with internal heating. *Proc. 27th National Heat Transfer Symposium of Japan*, Vol.II, pp.115-117.
- Kawara, Z., Takahashi, O., Serizawa, A. and Michiyoshi, I. (1994), Natural convection in a confined regime with internal heating. *Proc. 1st Symposium on Heat and Mass Transfer*, Kansai Branch of the Heat Transfer Society of Japan, pp.153-158.
- Kek, V. (1989), *Bénard-Konvektion in flüssigen Natriumschichten*. Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Kikuchi, Y., Kawasaki, T. and Shioyama, T. (1982), Thermal convection in a horizontal fluid layer heated internally and from below. *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 363-373.
- Kulacki, F.A. and Emara, A.A. (1977), Steady and transient thermal convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources. *J. Fluid Mechanics* **83**, 375-395.
- Kulacki, F.A. and Goldstein, R.J. (1972), Thermal convection in a horizontal fluid layer with uniform volumetric energy sources. *J. Fluid Mechanics* **55**, 271-287.
- Kulacki, F.A. and Nagle, M.E. (1975), Natural convection in a horizontal fluid layer with volumetric energy sources. *J. Heat Transfer* **91**, 204-211.
- Kulacki, F.A. and Richards, D.E. (1985), *Natural convection in plane layers and cavities with volumetric energy sources*. in *Natural Convection: fundamentals and applications* (Edited by S.Kakaç, W.Aung, R. Viskanta), pp.179-254, Hemisphere Publishing, New York.
- Launder, B.E., Sharma, B.I. (1974), Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer* **1**, 131-138.

- Launder B.E. and Spalding D.B. (1974), The Numerical Computation of Turbulent Flows. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **3**, 269-289.
- Lee, J.H. and Goldstein, R.J. (1988), Experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources. *J. Heat Transfer* **107**, 855-866.
- May, H.O. (1991), A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure containing internal heat sources. *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, 919-928.
- Nobile, E. (1993), Comparison of Turbulence Models for Side-Heated Cavities. *Proc. Eurotherm Seminar 22, Turbulent Natural Convection In Enclosures*, R.A.W.M. Henkes and C.J. Hoogendoorn, eds., Editions Europeennes Thermique et Industrie, Paris, pp. 214-229.
- Nobile, E. (1996), Simulation of time-dependent flow in cavities with the additive-correction multigrid method. Part I: Mathematical formulation; Part II: Applications. *Numer. Heat Transfer* **30**, 341-350 and 351-370.
- Paolucci, S. (1990), Direct numerical simulation of two-dimensional turbulent natural convection in an enclosed cavity. *J. Fluid Mech.* **215**, 229-262.
- Proust, E., Anzidei, L., Casini, G., Dalle Donne, M., Giancarli, L. and Malang, S. (1993), Breeding blanket for DEMO. *Fusion Engng. and Des.* **22**, 19-33.
- Richards, D.E. (1981), *Thermal convection with internal heating in vertical rectangular cavities*. Ph.D. Dissertation, The Ohio State University.
- Runcom, S. K. (1962), Convection currents in the Earth's mantle. *Nature* **195**, 1248-1250.
- Shim, Y.M. and Hyun, J.M. (1997), Transient confined natural convection with internal heat generation. *Int. J. Heat Fluid Flow* **18**, 328-333.
- Suo-Anttila, A.J. and Catton, I. (1975), The effect of a stabilizing temperature gradient on heat transfer from a molten fuel layer with volumetric heating. *ASME J. Heat Transfer* **97**, 544-550.
- Thirlby, R. (1970), Convection in an internally heated layer. *J. Fluid Mech.* **44**, 673-693.
- Tveitereid, M. and Palm, E. (1976), Convection due to internal heat sources. *J. Fluid Mech.* **76**, 481-499.
- Van Doormal, J.R. and Raithby, G.D. (1984), Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible flows. *Numer. Heat Transfer* **7**, 147-163.
- Viskanta, R., Kim, D.M. and Gau, C. (1986), Three-dimensional natural convection heat transfer of a liquid metal in a cavity. *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 475-485.
- Wang, H.S. and Wang, Q.J. (1988), Natural Convection in an externally heated vertical rectangular enclosure containing internal energy sources. *Proc. Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Thermodynamics*, R.K. Sha *et al.*, eds., pp.709-714, Elsevier, Amsterdam.
- Winters, K.H. (1988), Oscillatory convection in liquid metals in a horizontal temperature gradient. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **NSI 401-414**.
- Xin, S. and Le Quéré, P. (1995), Direct numerical simulation of two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *J. Fluid Mech.* **304**, 87-111.
- Yakhot V., Orszag S.A. (1986), Renormalization Group Analysis of Turbulence. I. Basic Theory. *J. of Scientific Computing* **1**, 1-51.
- Yakhot V., Orszag S.A., Yakhot A. (1987), Heat Transfer in Turbulent Fluids - I. Pipe Flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **30**, 15-22.

FIGURE

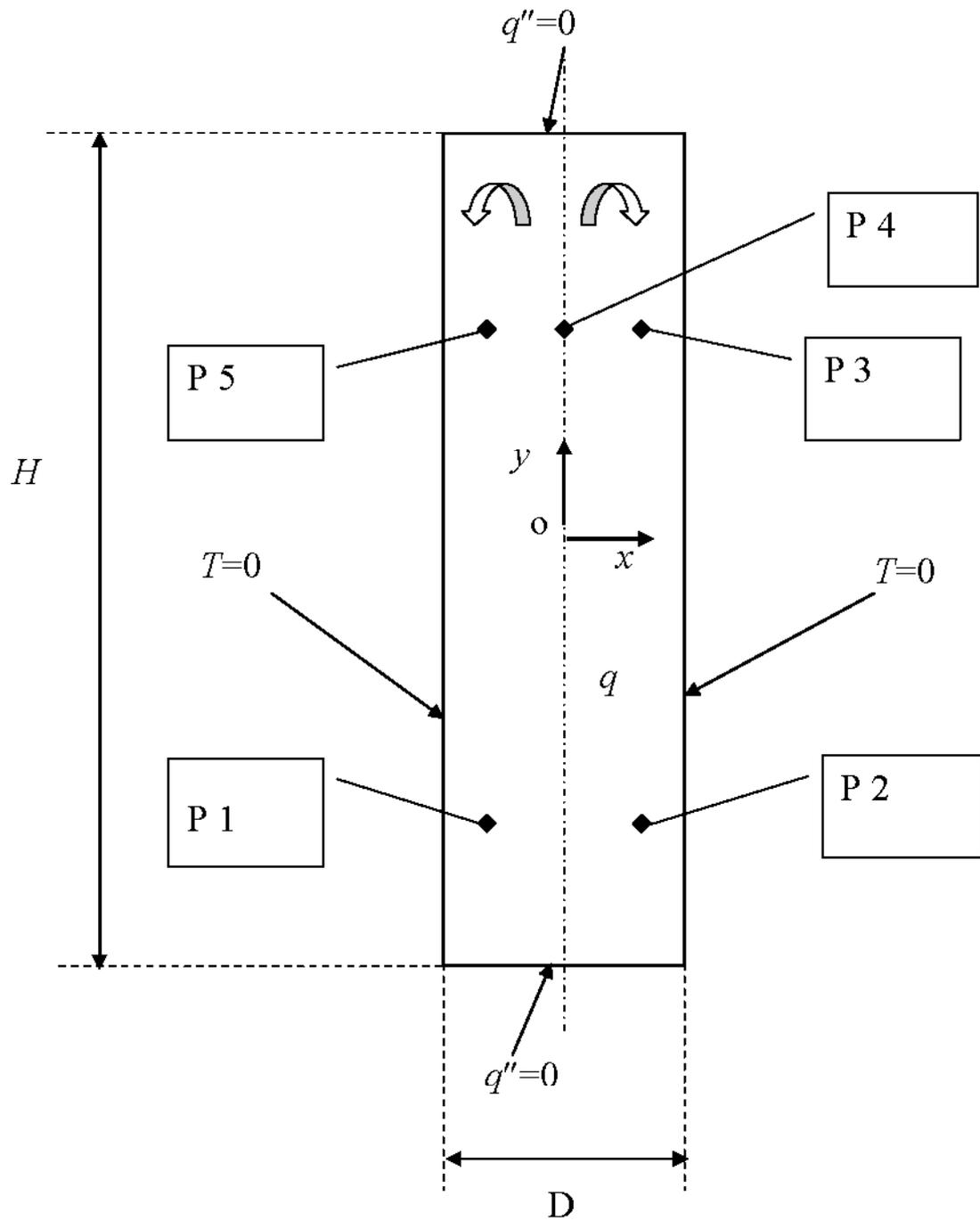


Figura 2.1

Schema della geometria e notazione usata per la cavità snella ($AR=4$)

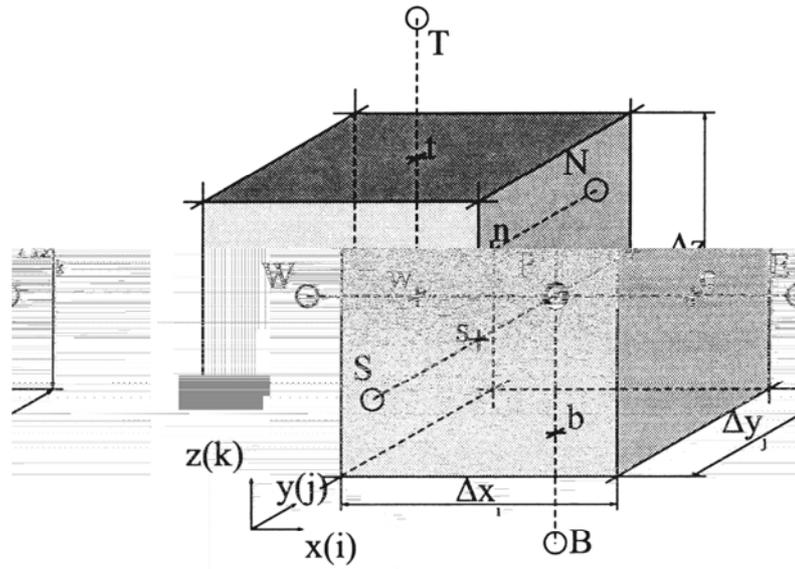


Figura 2.2
Volume di controllo in coordinate cartesiane

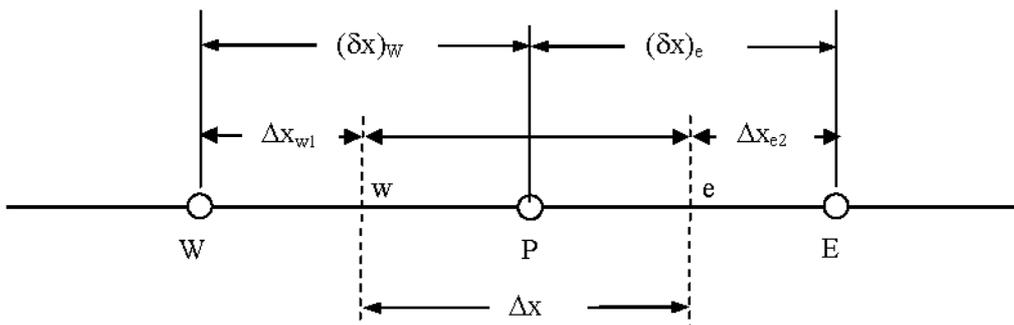


Figura 2.3
Punti di griglia per la discretizzazione di un problema monodimensionale

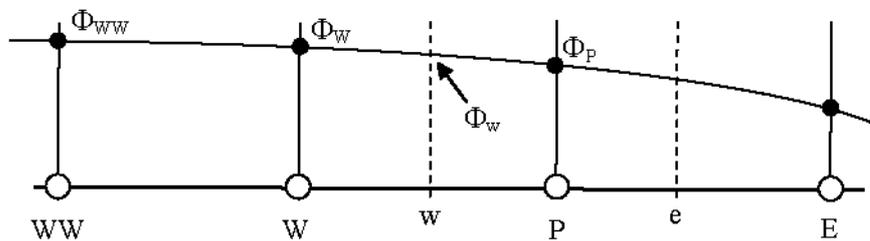
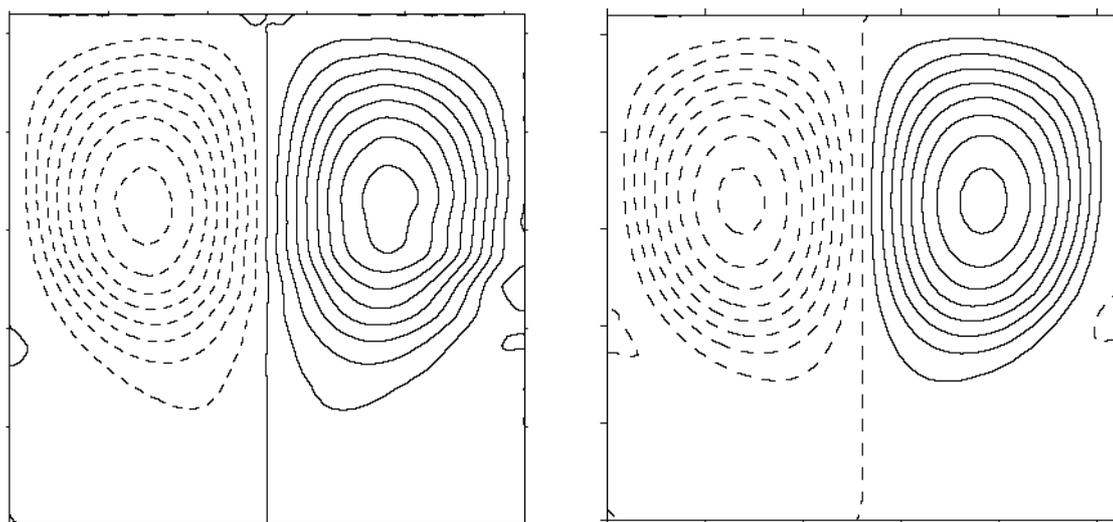
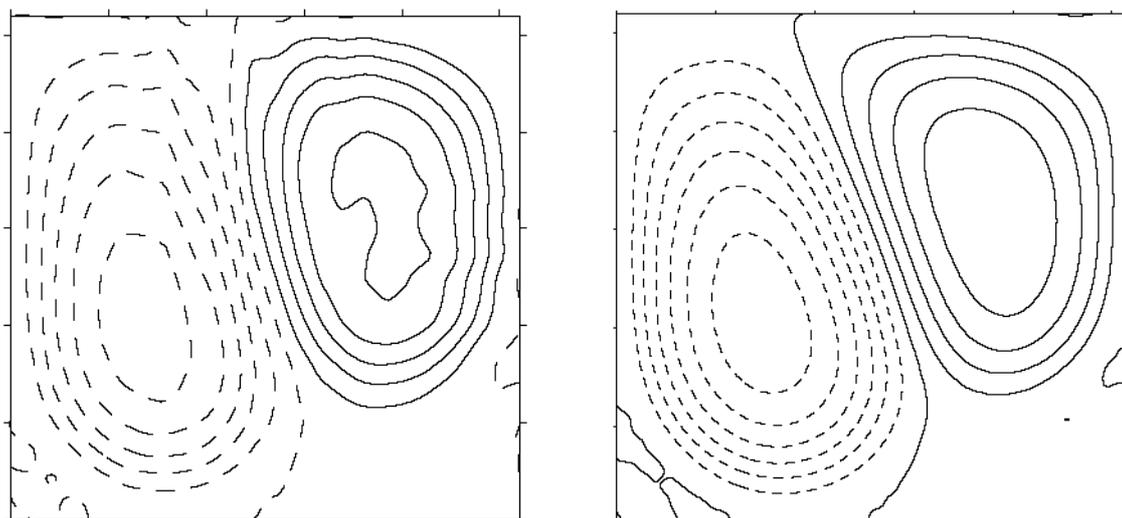


Figura 2.4
Schema di interpolazione dell'algoritmo QUICK



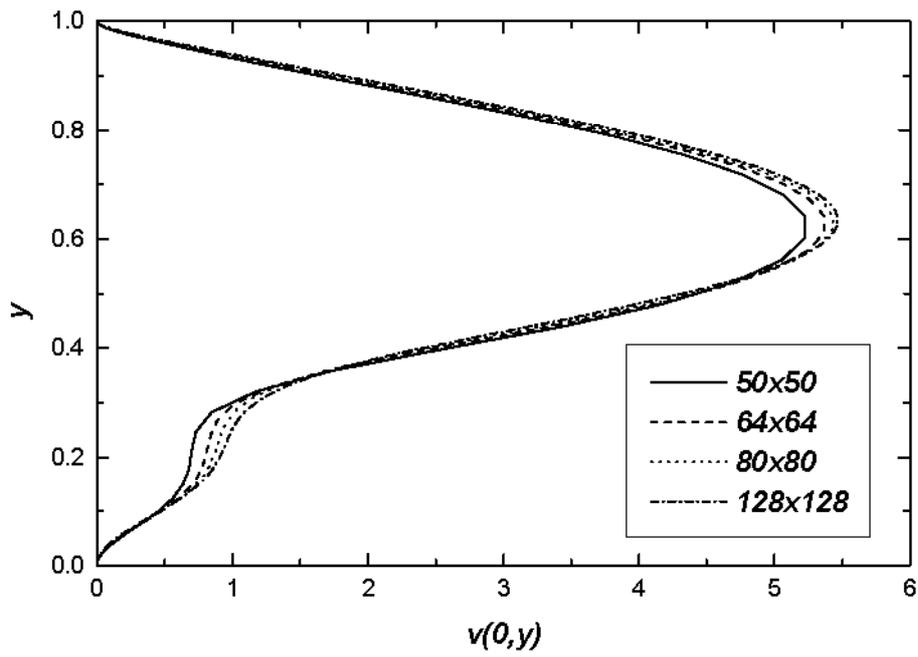
a)



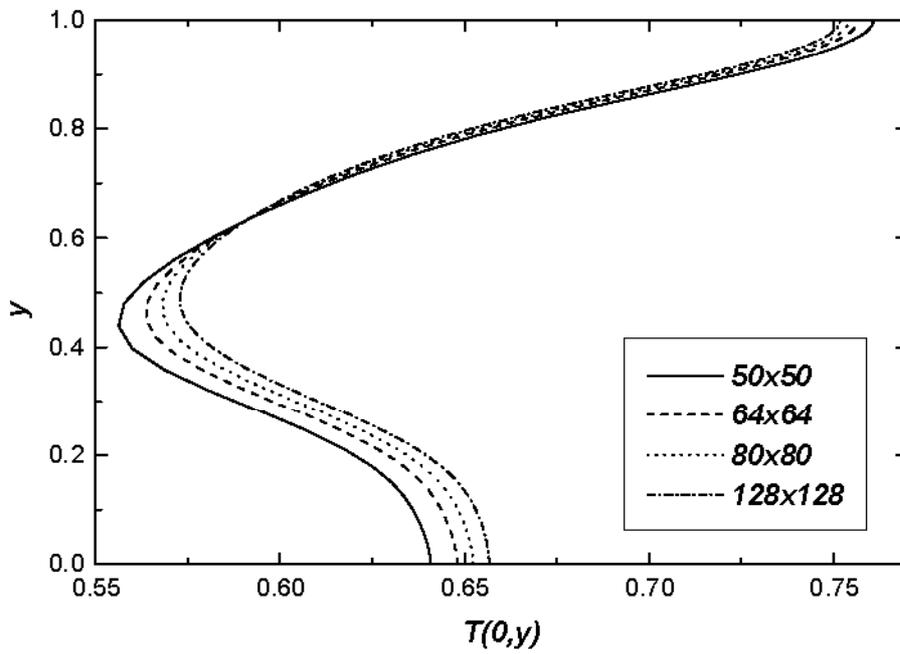
b)

Figura 2.5

- a) Confronto per il caso $AR=1$ e $Gr=10^7$ tra i risultati ottenuti con legge di addensamento della griglia a serie geometrica (a sinistra) e a tangente iperbolica (a destra).
- b) Confronto per il caso $AR=1$ e $Gr=10^7$ tra i risultati ottenuti con una griglia 64×64 con legge di addensamento a serie geometrica (a sinistra) e una griglia 80×80 con legge di addensamento a tangente iperbolica (a destra).



a)



b)

Figura 2.6

Andamento della velocità (a) e della temperatura in mezzeria (b) al variare del numero dei punti della griglia per il caso $AR=1$, $Gr=10^7$.

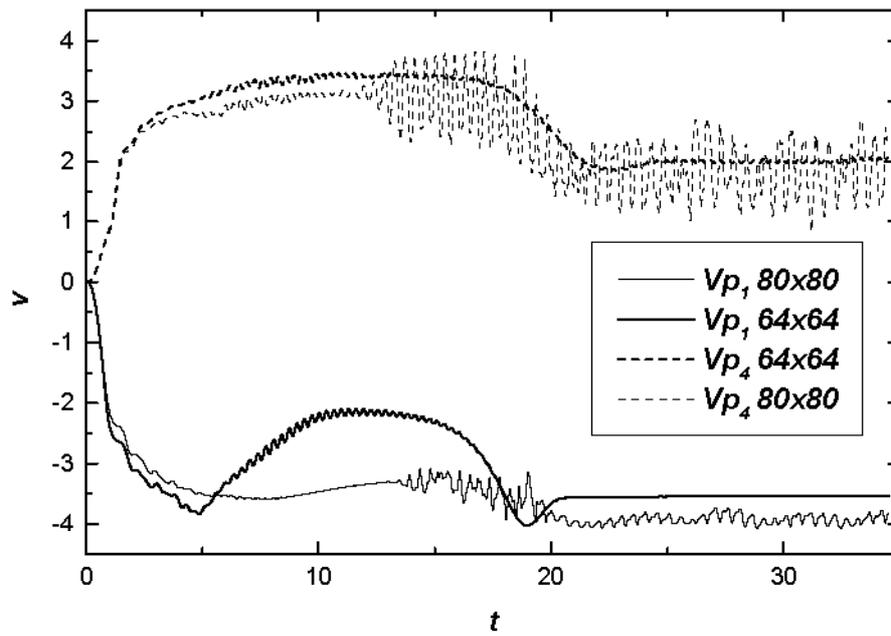


Figura 2.7

Confronto per il caso $AR=1$ e $Gr=10^8$ tra le due griglie a diverso fattore di addensamento e diverso numero di nodi.

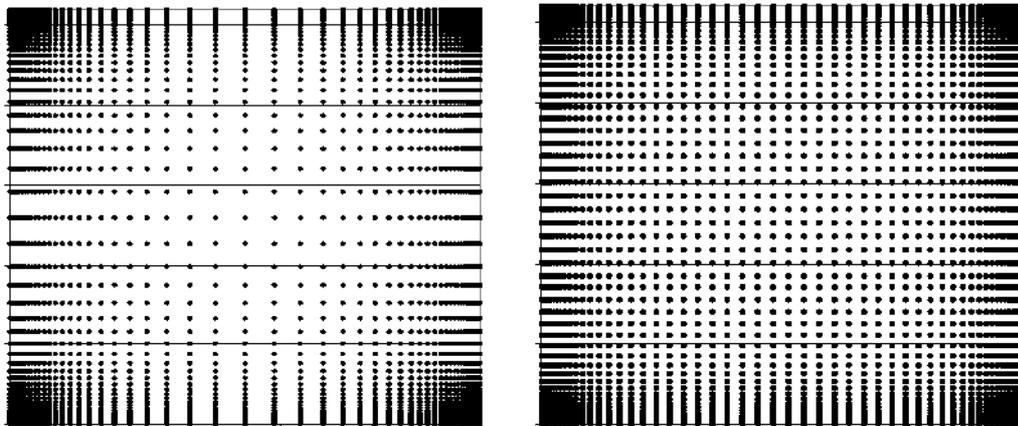
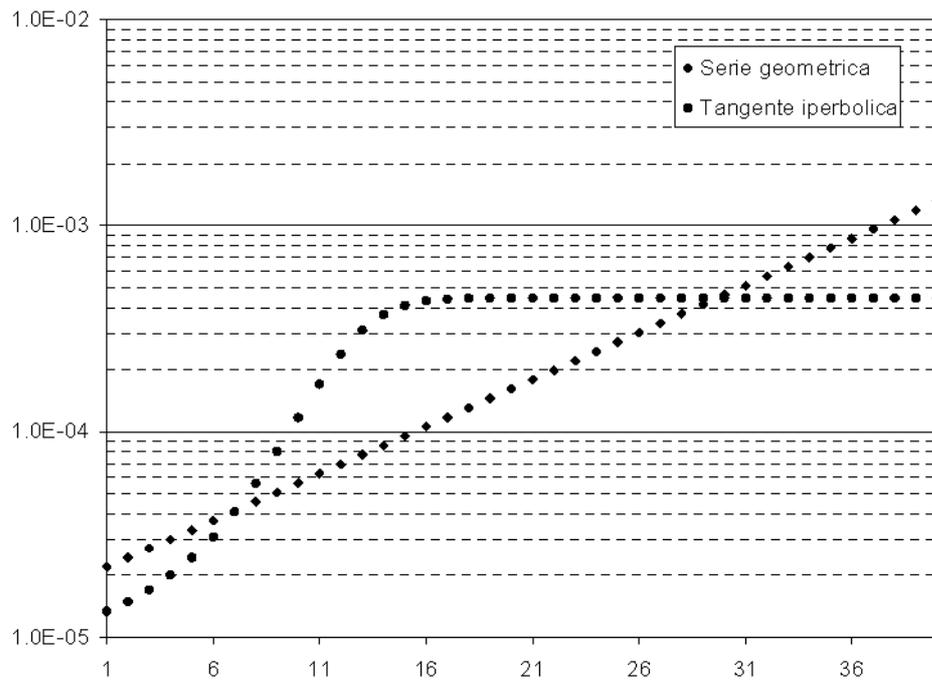
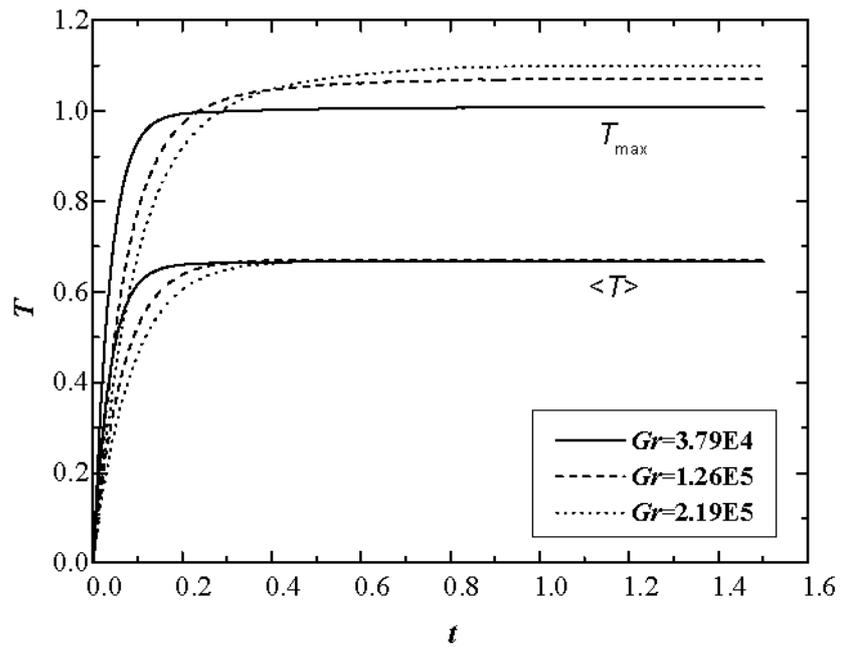


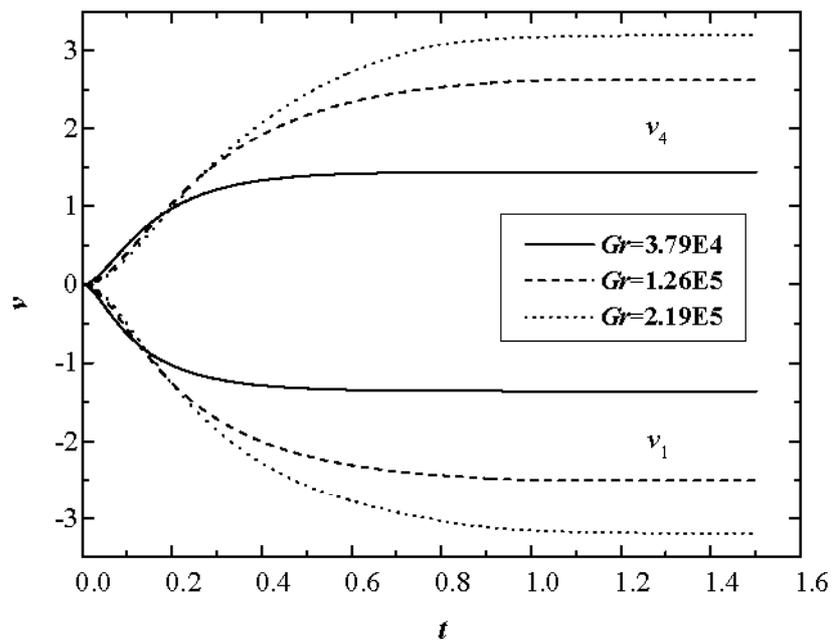
Figura 2.8

In alto: andamento delle dimensioni della cella (80×80) in funzione del numero d'ordine dei nodi.

In basso griglia 64×64 : a sinistra con legge di addensamento a serie geometrica, a destra a tangente iperbolica.



a)

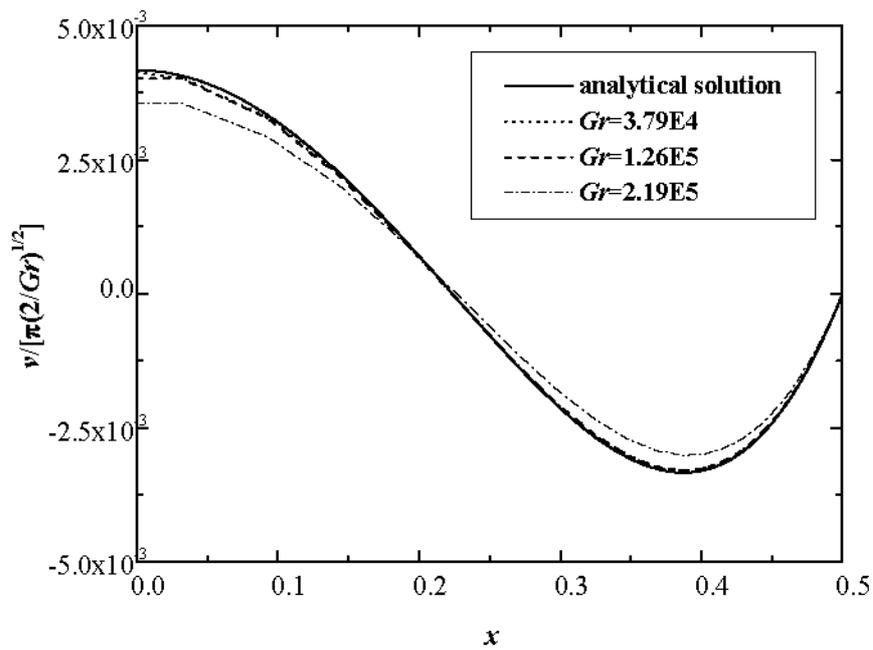


b)

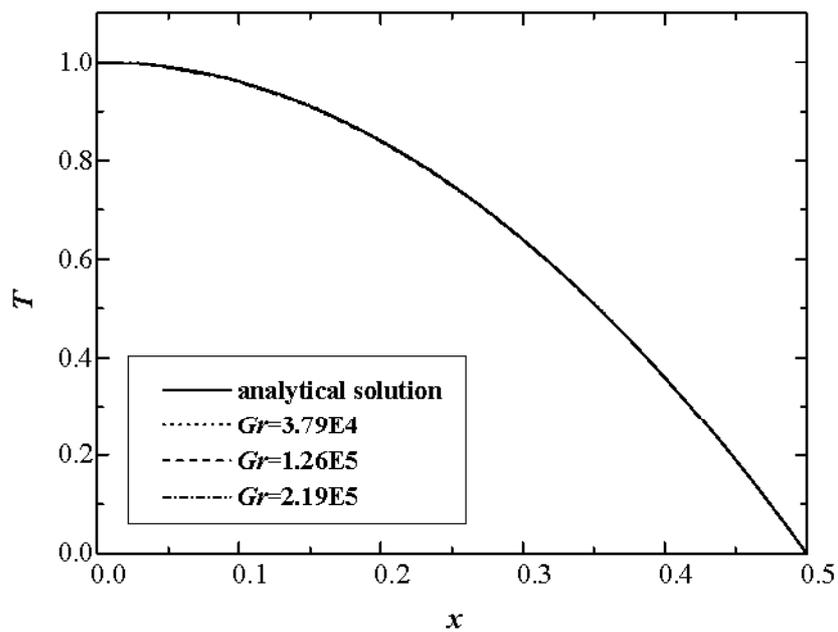
Figura 3.1

Transitori per i casi laminari stazionari ad $AR=4$.

(a) temperature massima e media; (b) velocità verticale nei punti di monitoraggio 1 e 4.



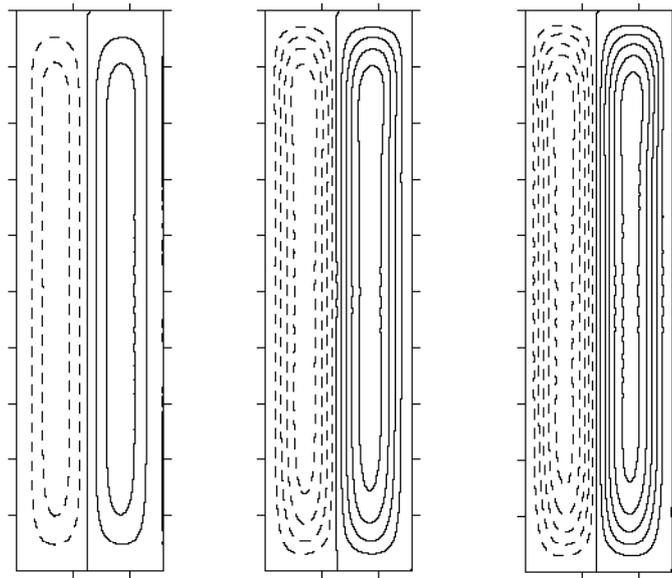
a)



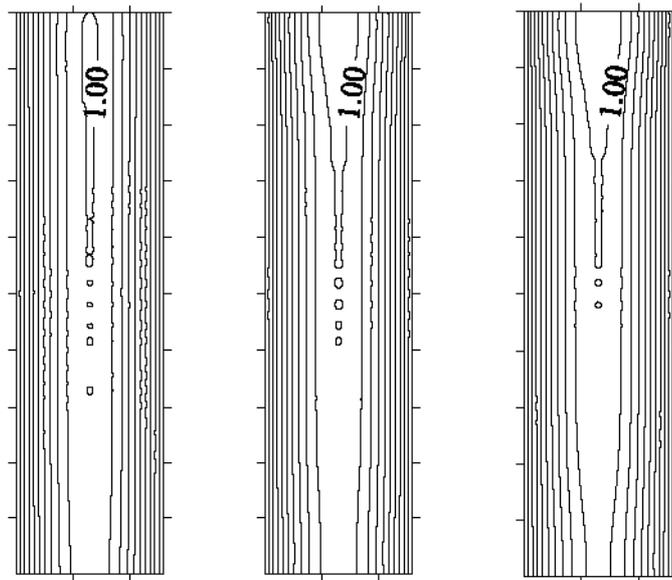
b)

Figura 3.2

Profili di velocità verticale (a) e di temperatura (b) normalizzati, valutati a metà altezza ($y=0$) per i casi stazionari. Linea continua: soluzione analitica per moto parallelo; linea tratteggiata: risultati numerici per $AR=4$ e diversi numeri di Grashof.



a)



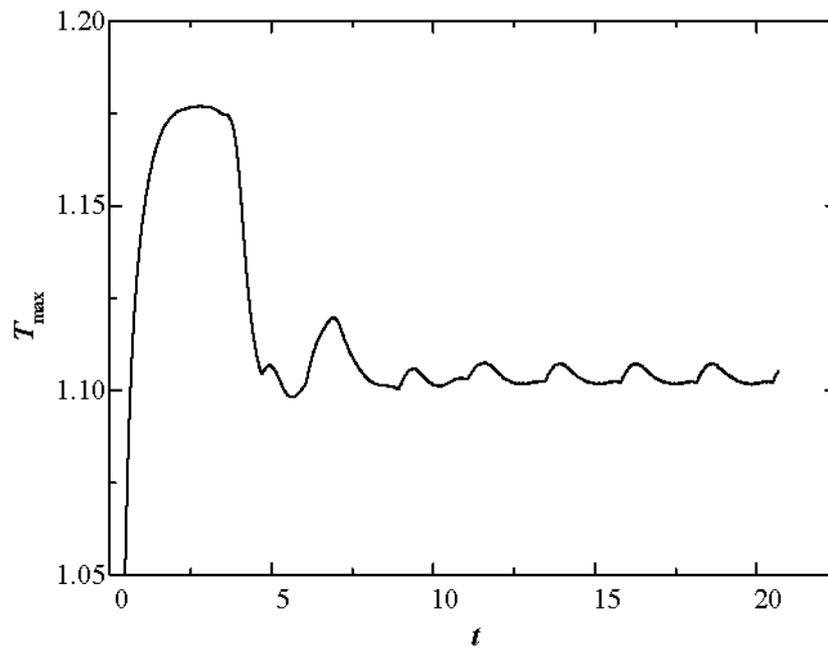
b)

Figura 3.3

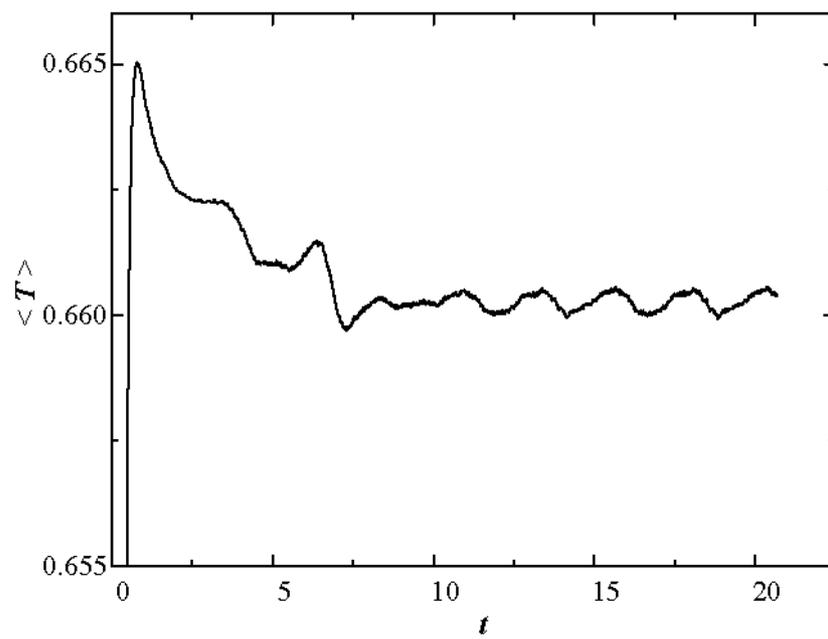
Campi di moto e di temperatura per gli stati stazionari ad $AR=4$. Da sinistra a destra: $Gr=3.79 \cdot 10^4, 1.26 \cdot 10^5, 2.19 \cdot 10^5$.

a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale fra le linee 0.2. Linea solida: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria.

b) Isotherme, intervallo adimensionale fra le linee 0.1.



a)



b)

Figura 3.4

Andamento della temperatura massima (a) e media (b) in funzione del tempo per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^5$ (moto periodico).

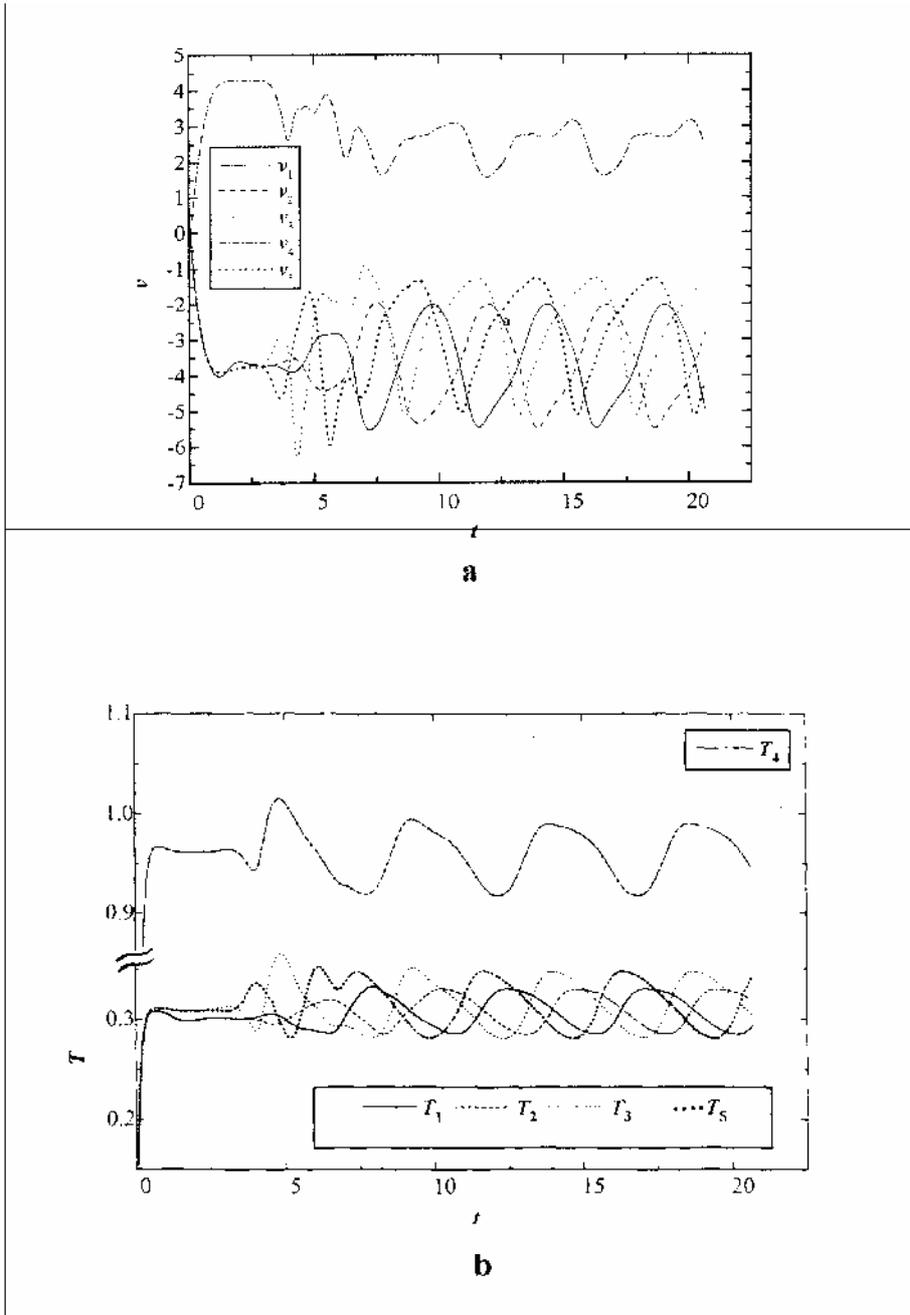
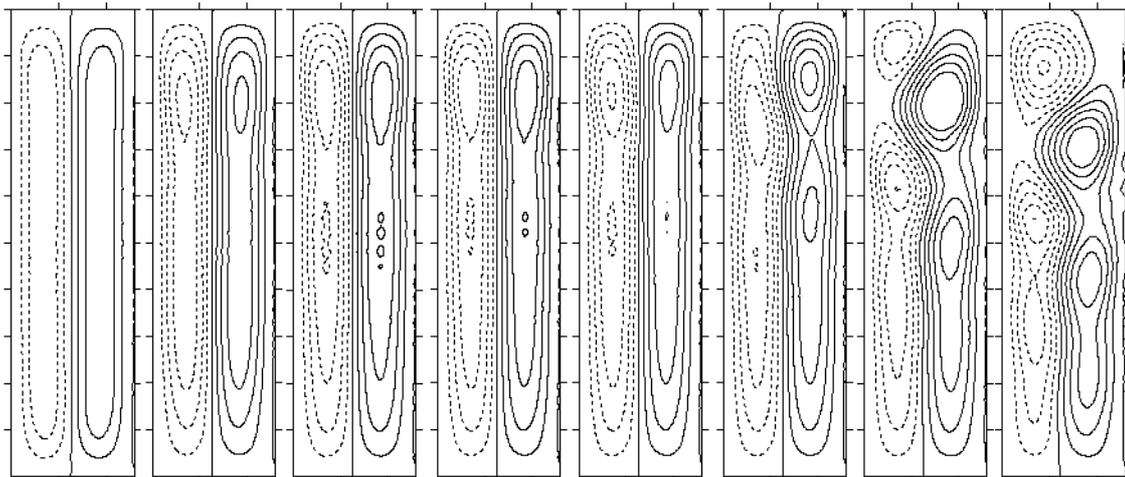
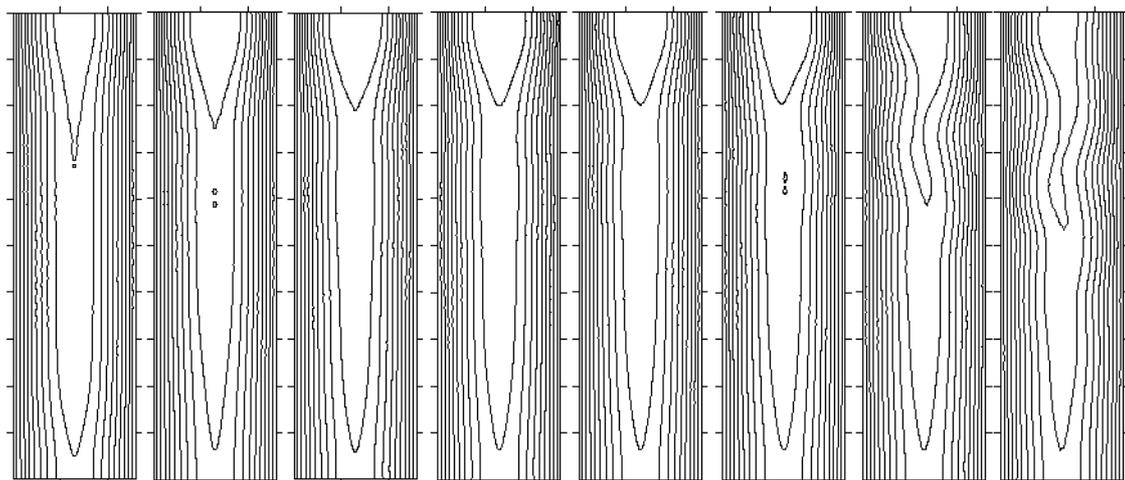


Figura 3.5

Andamento della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) nei punti di monitoraggio P1÷P5 per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^5$ (moto periodico).



a)

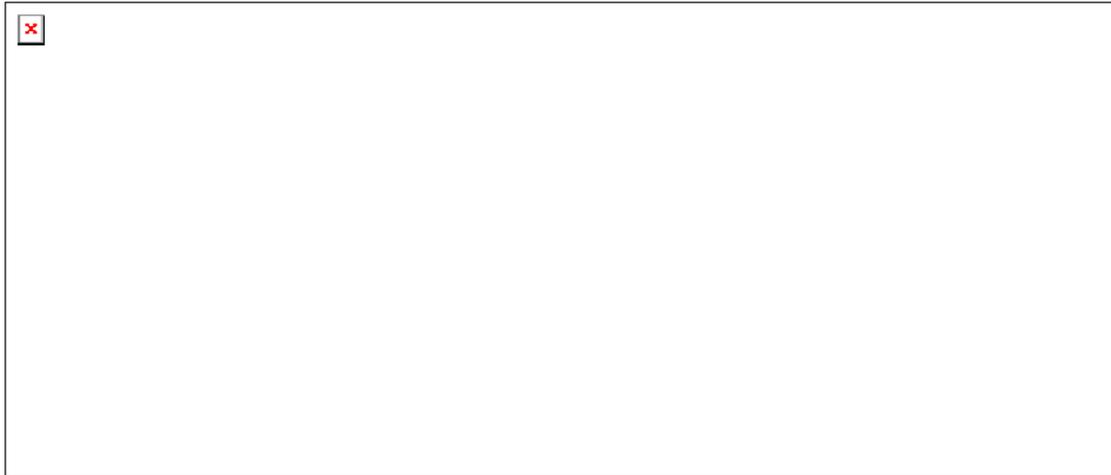


b)

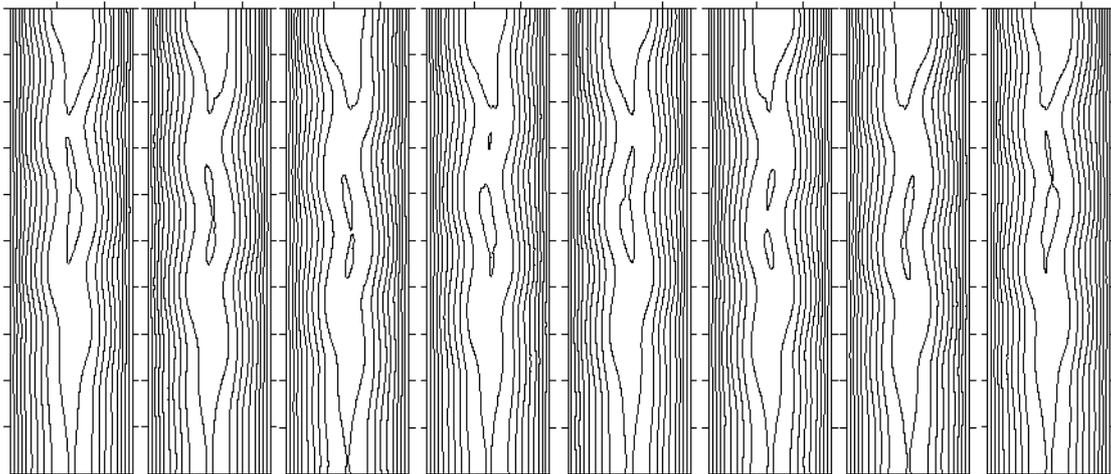
Figura 3.6

Sequenza del campo di moto e di temperatura per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^5$ (moto periodico).
Intervallo temporale adimensionale ~ 0.63 .

- a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.2. Linea continua: circolazione oraria.
Linea tratteggiata: circolazione antioraria.
- b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.1.



a)



b)

Figura 3.7

Campi di moto e di temperatura per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^5$, dopo che si è stabilizzato il moto periodico. Intervallo di tempo adimensionale ~ 0.63

- a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.2. Linea continua: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria.
- b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.1.

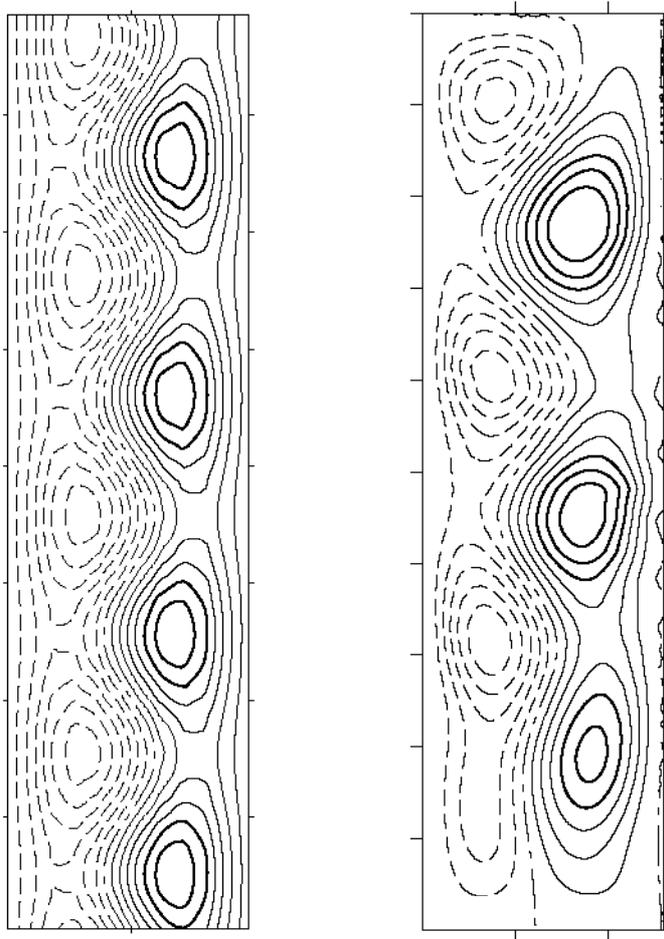


Figura 3.8

Confronto tra la soluzione analitica con sovrapposta un'onda viaggiante antisimmetrica (a sinistra), e un'istantanea del moto periodico ottenuto mediante simulazione diretta per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^5$ (a destra). Linea continua: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria.

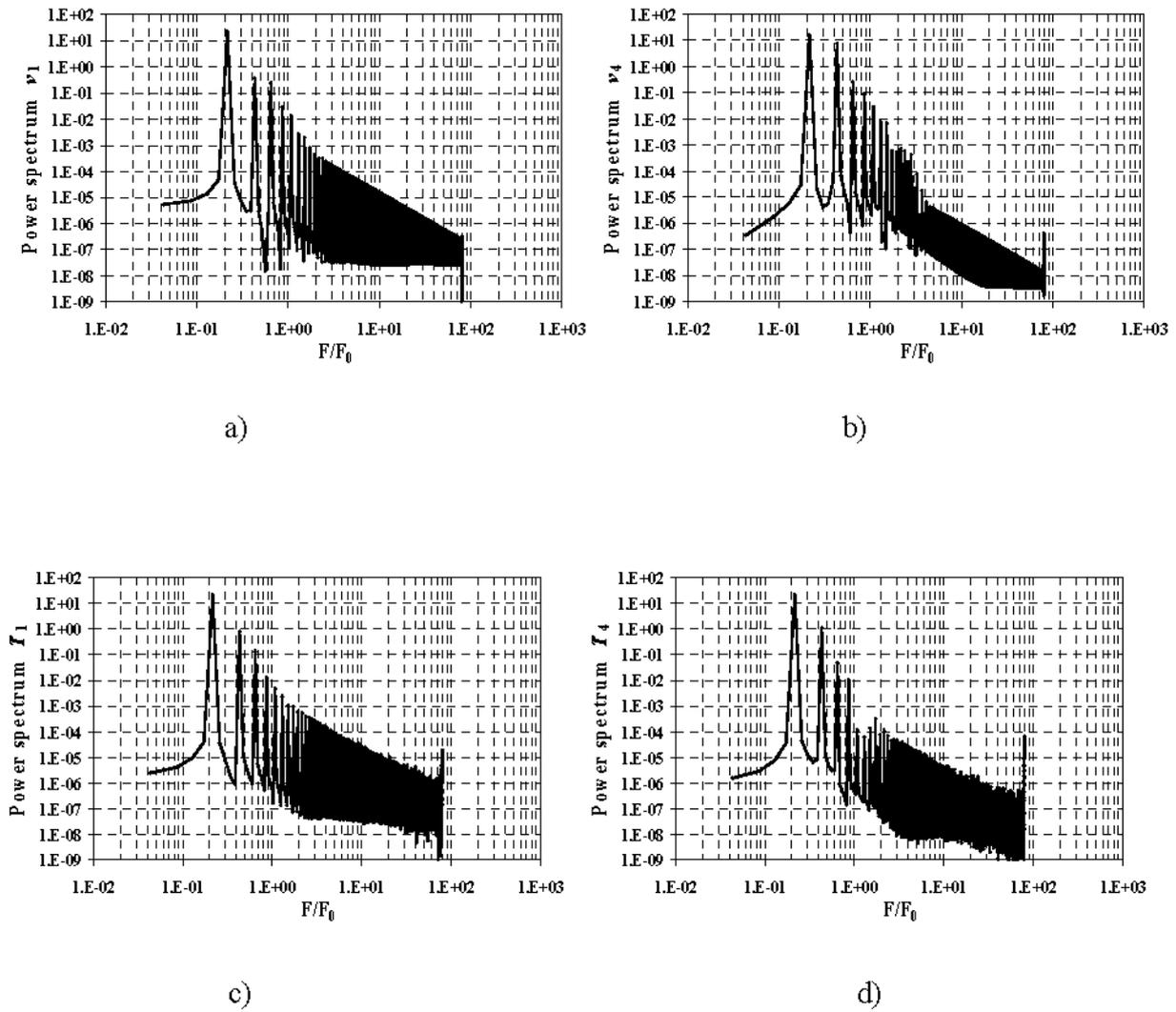
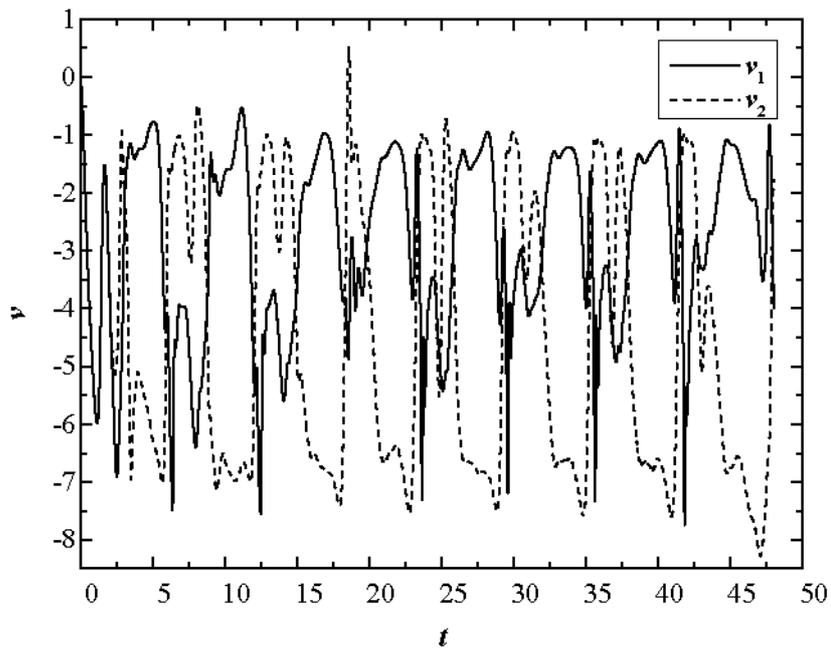
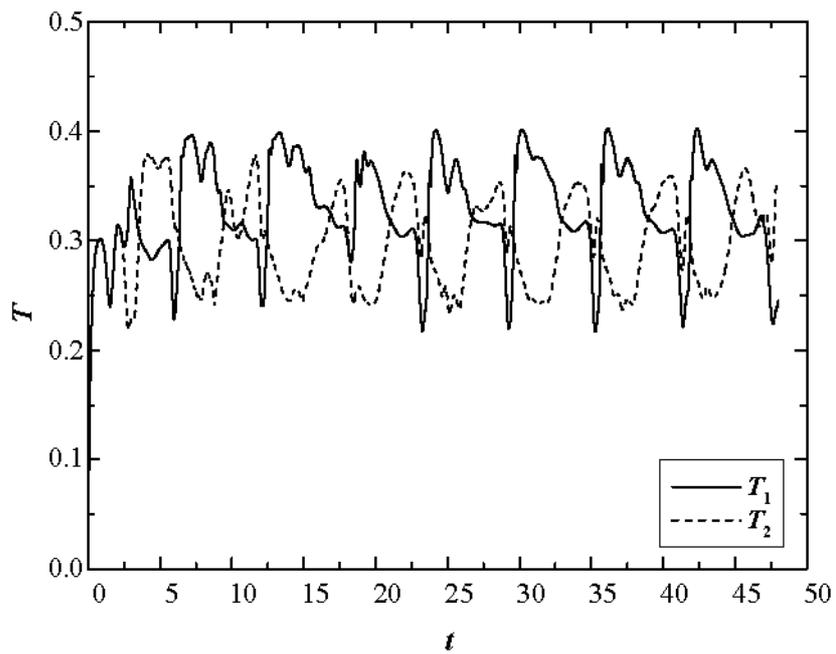


Figura 3.9

Spettri normalizzati della velocità verticale v (a, b) e della temperatura T (c, d) nei punti di monitoraggio P1 (a, c) e P4 (b, d) per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^5$ (moto periodico).



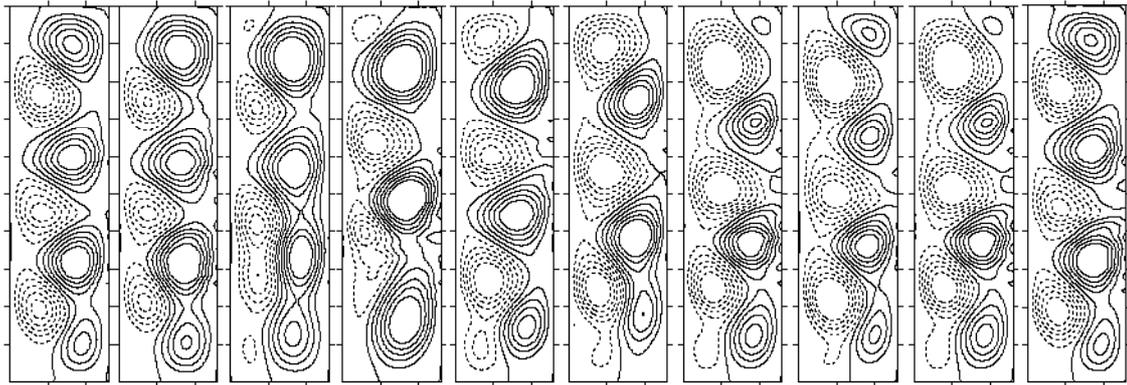
a)



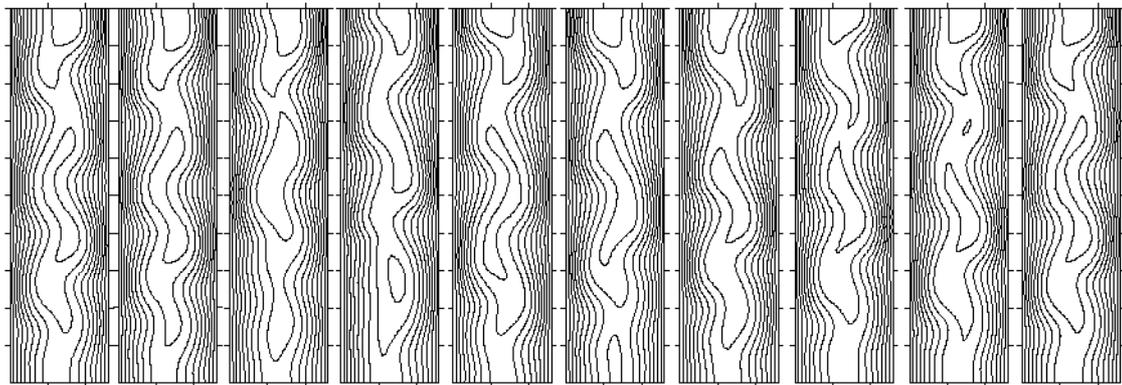
b)

Figura 3.10

Andamenti della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) nei punti di monitoraggio P1 e P2 per $AR=4$ e $Gr=1.26 \cdot 10^6$ (moto quasi periodico).



a)

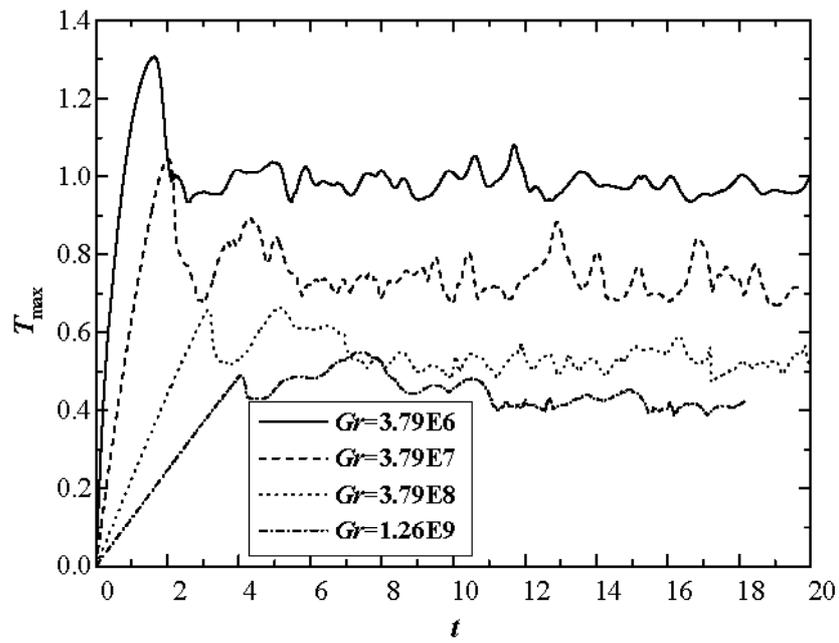


b)

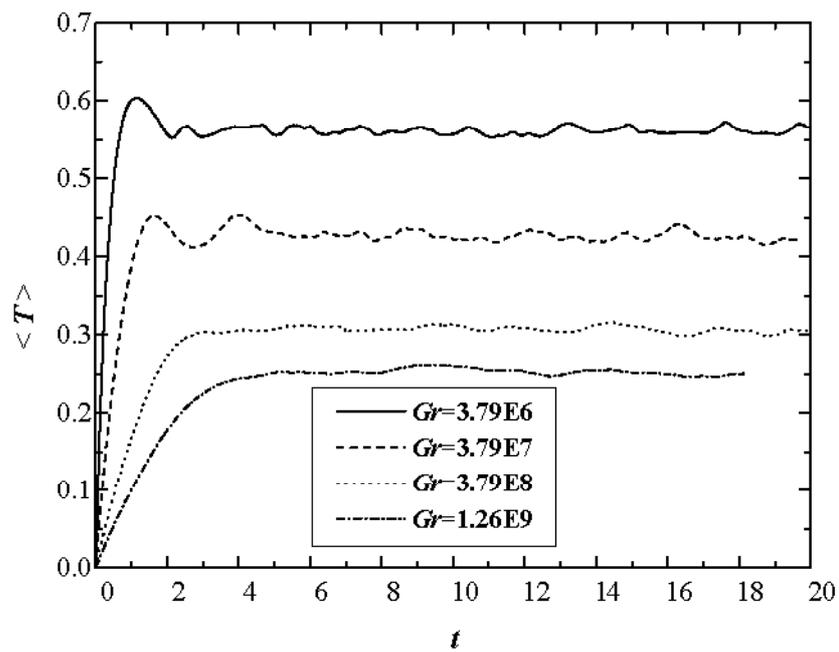
Figura 3.11

Sequenza del campo di moto e della distribuzione di temperatura per $AR=4$ e $Gr=1.26 \cdot 10^6$ dopo che si è stabilizzato il moto quasi periodico. Intervallo temporale adimensionale ~ 0.57 . La sequenza copre circa un periodo principale t_p .

- a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.2. Linea continua: circolazione oraria. Linea tratteggiata: circolazione antioraria.
- b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.1.



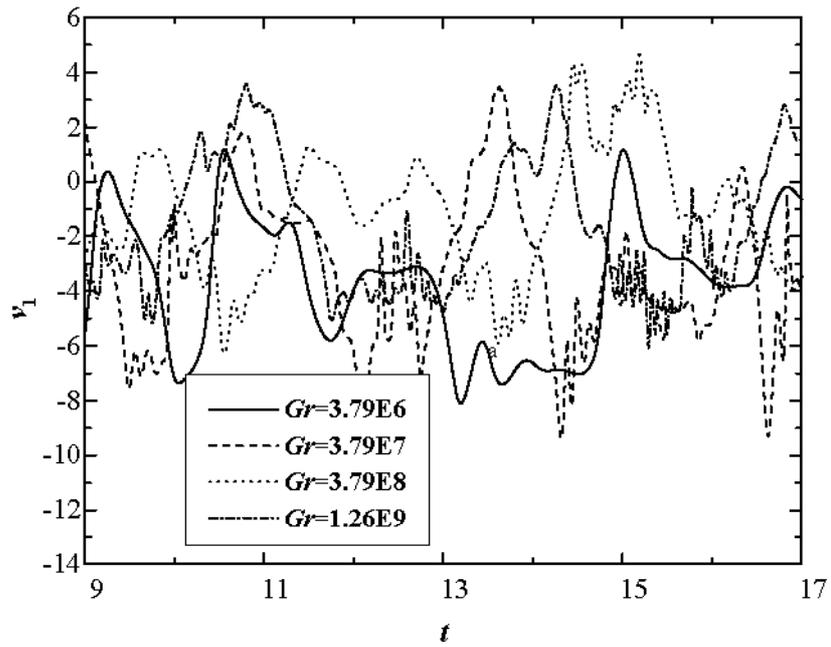
a)



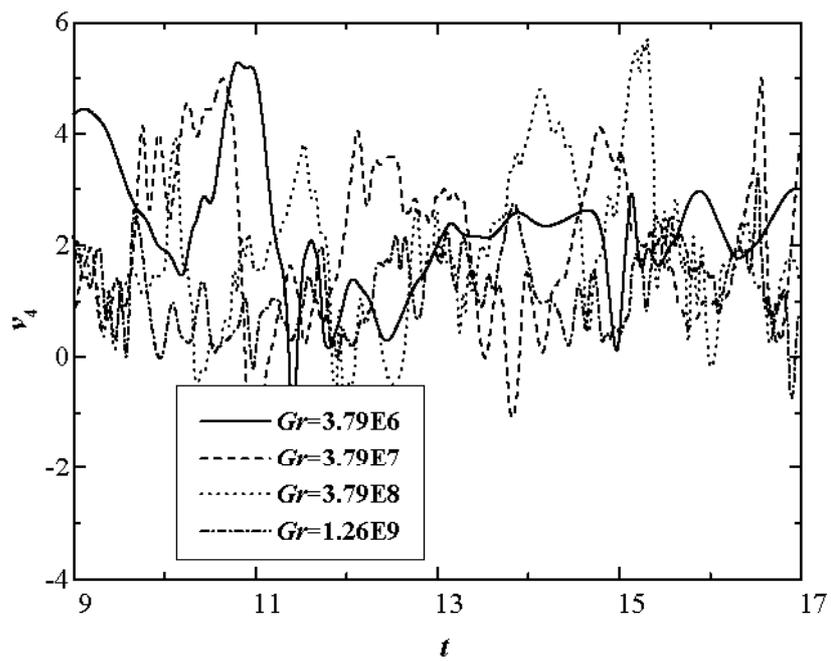
b)

Figura 3.12

Andamento della temperatura massima (a) e media (b) in funzione del tempo per i casi caotici ad $AR=4$.



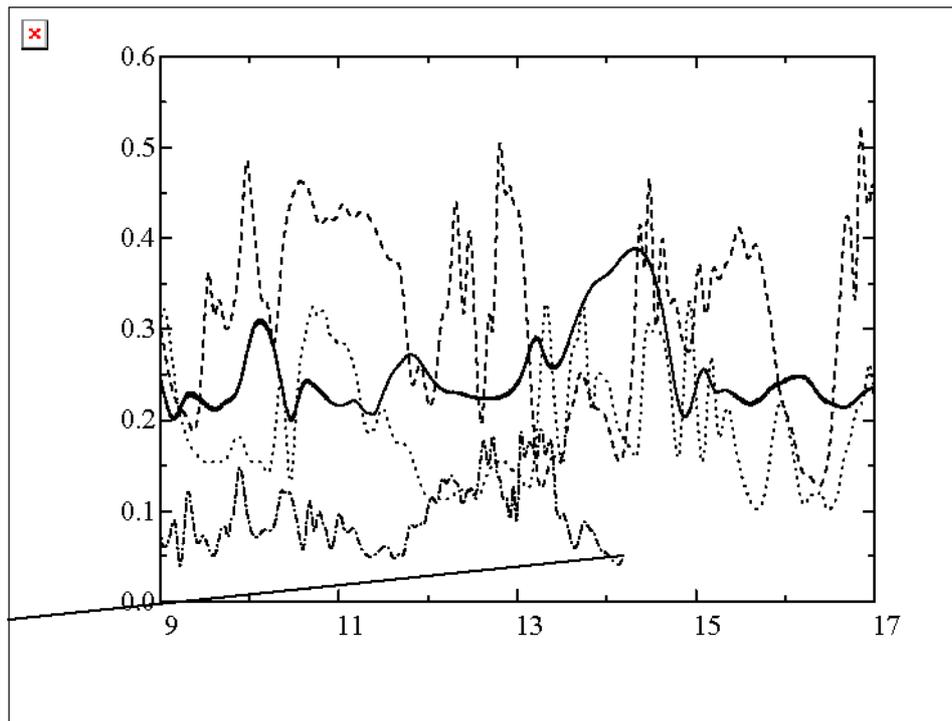
a)



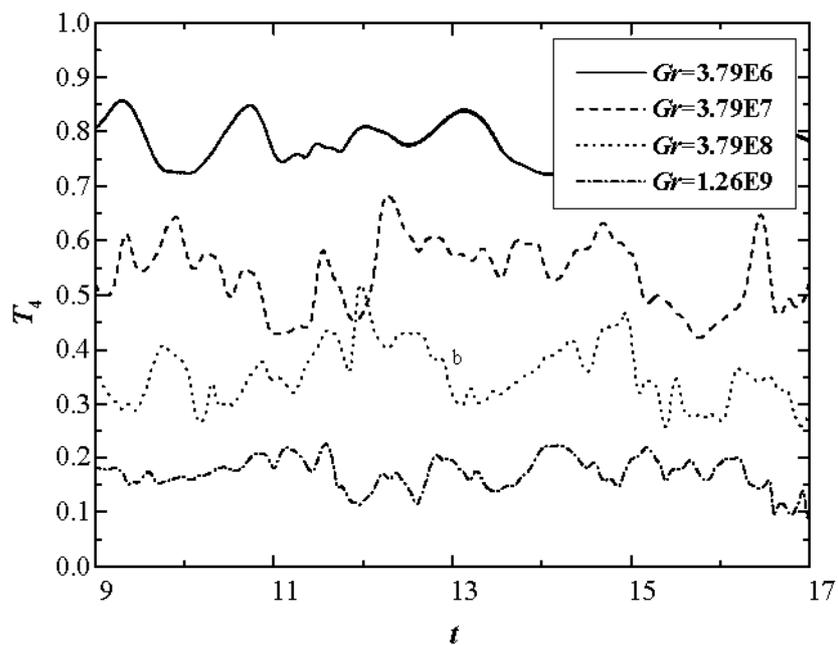
b)

Figura 3.13

Andamento della velocità verticale per i quattro casi caotici ad $AR=4$ nei punti di monitoraggio P1 (a) e P4 (b)



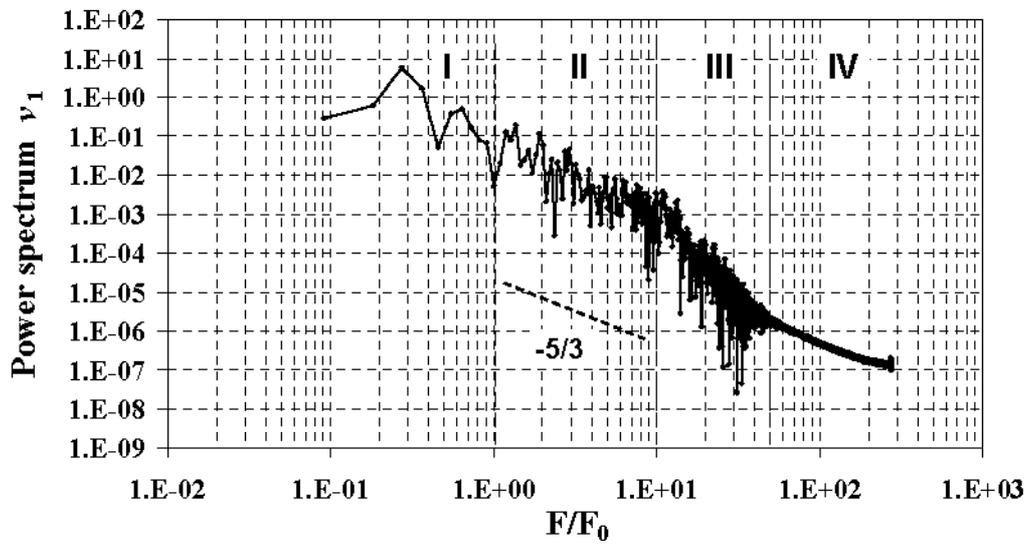
a)



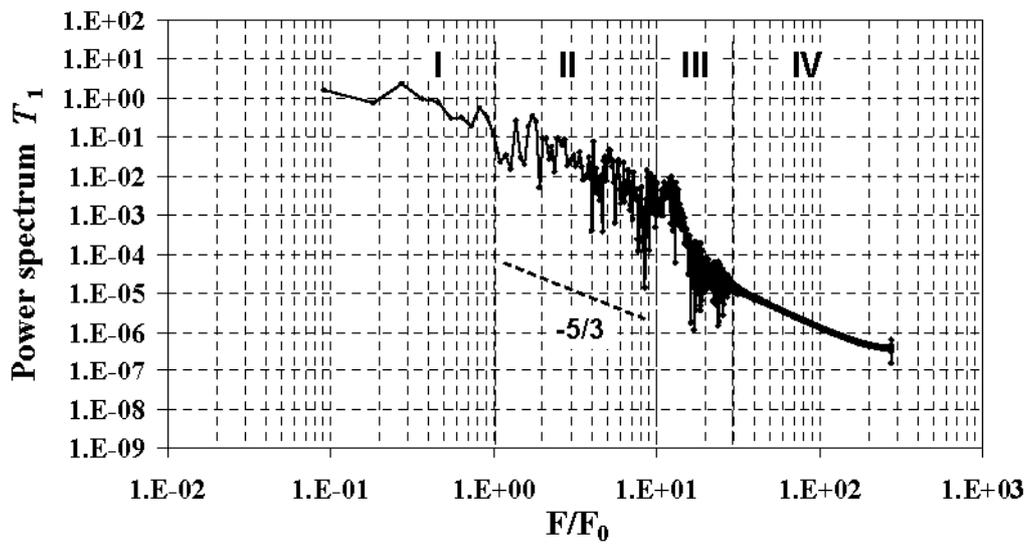
b)

Figura 3.14

Andamento della temperatura T per i quattro casi caotici ad $AR=4$ nei punti di monitoraggio P1 (a) e P4 (b).



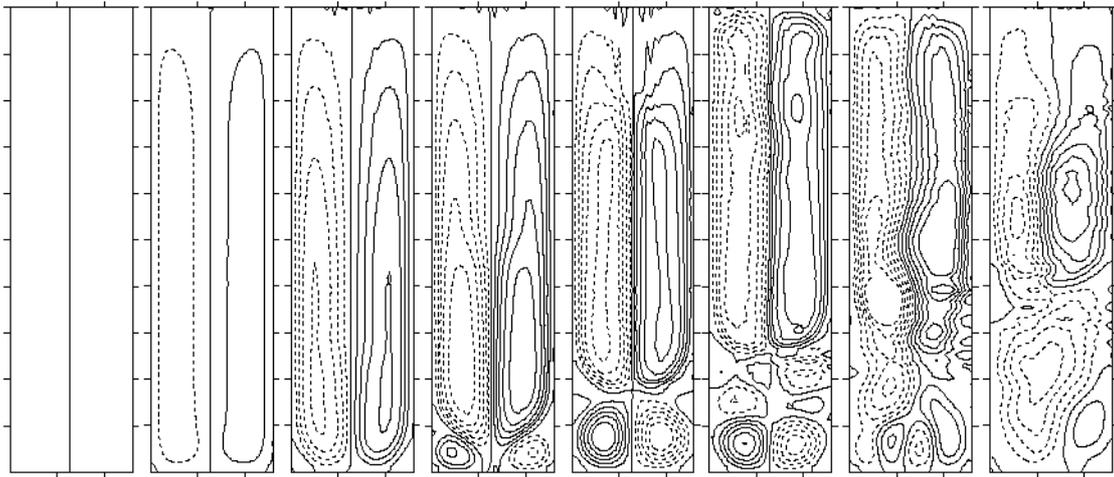
a)



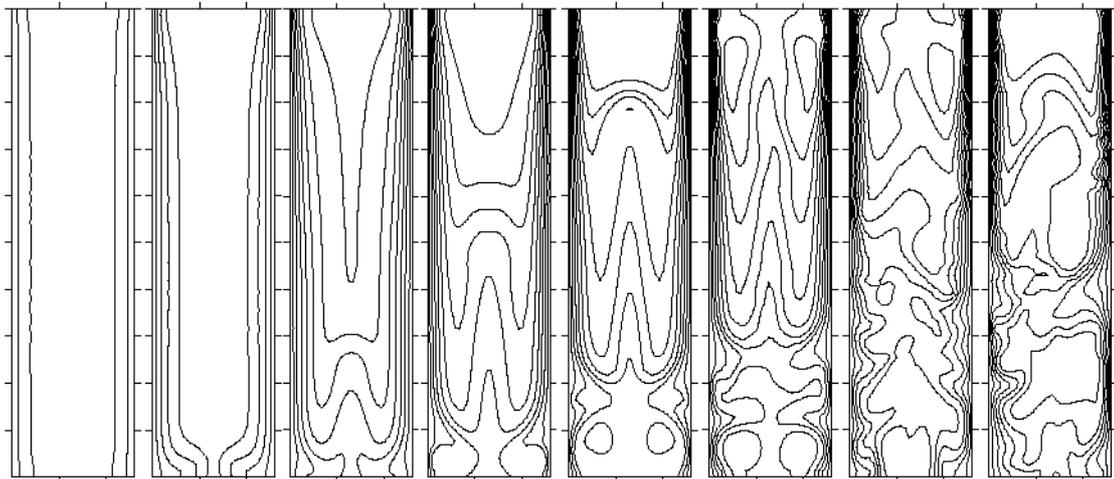
b)

Figura 3.15

Spettri normalizzati della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) nel punto di monitoraggio P1 per $AR=4$ e $Gr=1.26 \cdot 10^9$ (moto caotico).



a)



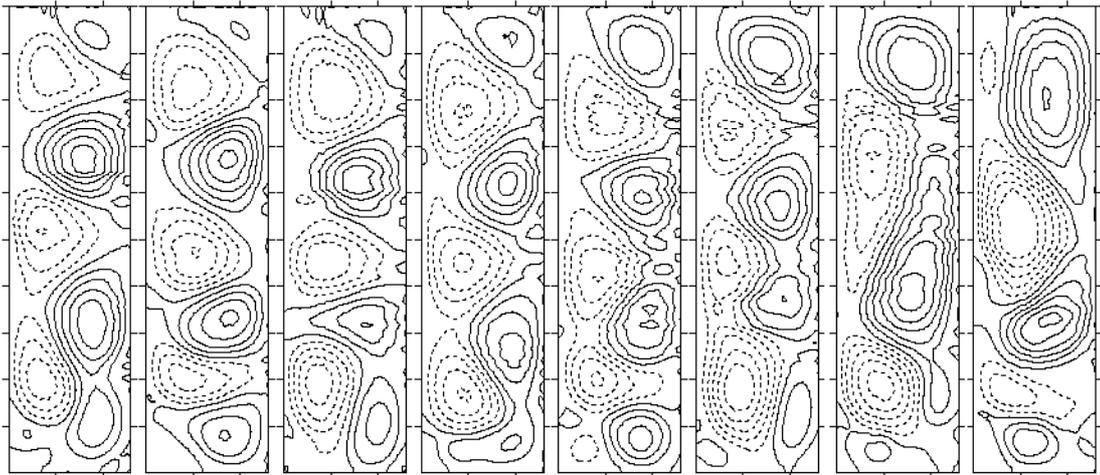
b)

Figura 3.16

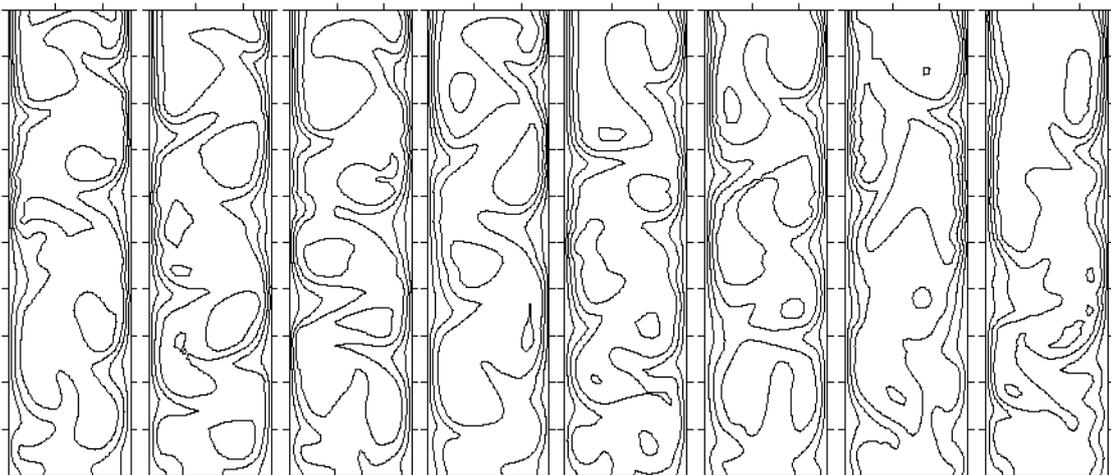
Transitorio iniziale per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^8$ (moto caotico). Intervallo di tempo adimensionale ~ 0.55 .

c) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.2. Linea continua: circolazione oraria. Linea tratteggiata: circolazione antioraria.

d) Isotherme, intervallo adimensionale 0.05.



a)



b)

Figura 3.17

Istantanee dei campi di moto e di temperatura per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^8$ (moto caotico) dopo che il transitorio iniziale è terminato. Intervallo di tempo adimensionale ~ 0.4 .

- e) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.2. Linea continua: circolazione oraria. Linea tratteggiata: circolazione antioraria.
- f) Isotherme, intervallo adimensionale 0.1.

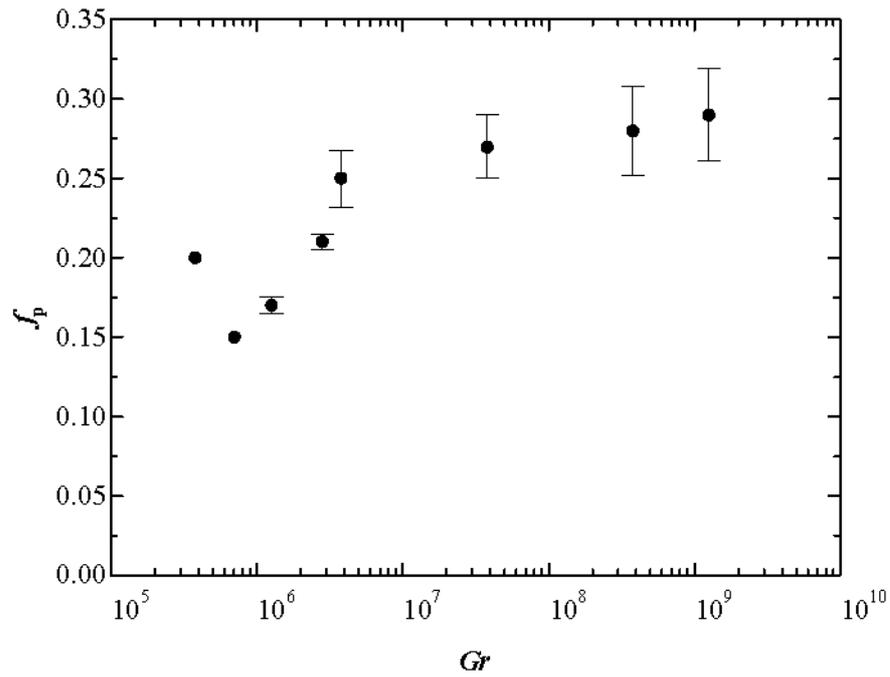


Figura 3.18

Frequenza di rinnovo dei rulli f_p in funzione del numero di Grashof per tutti i casi non stazionari simulati ad $AR=4$. Sono indicate le barre di dispersione.

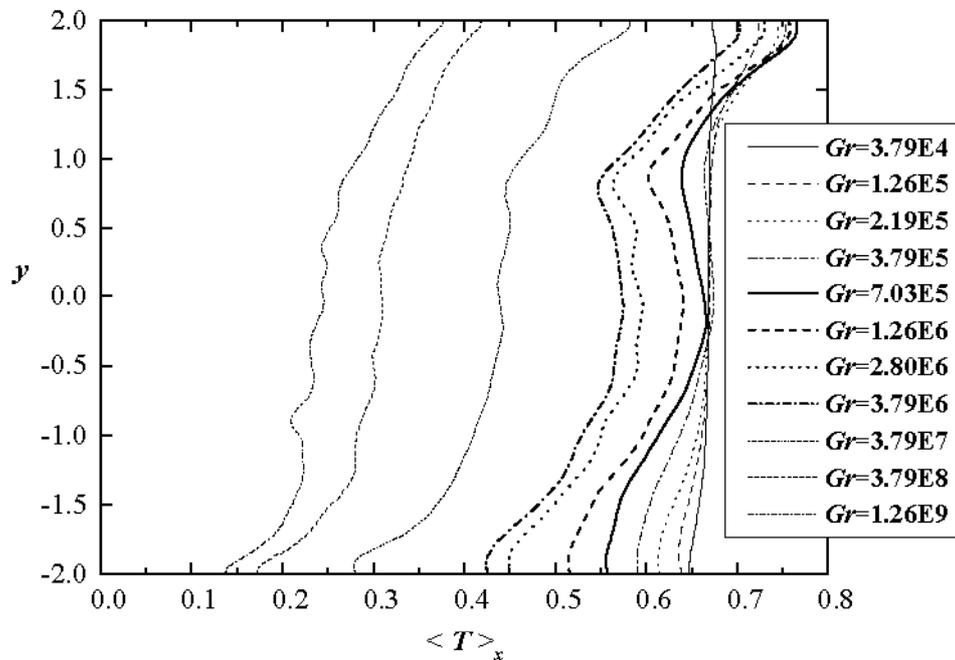


Figura 3.19

Profili verticali della temperatura mediata nel tempo e lungo x $\langle \bar{T} \rangle_x$ per tutti i casi simulati ad $AR=4$ che mostrano la stratificazione termica di \bar{T} .

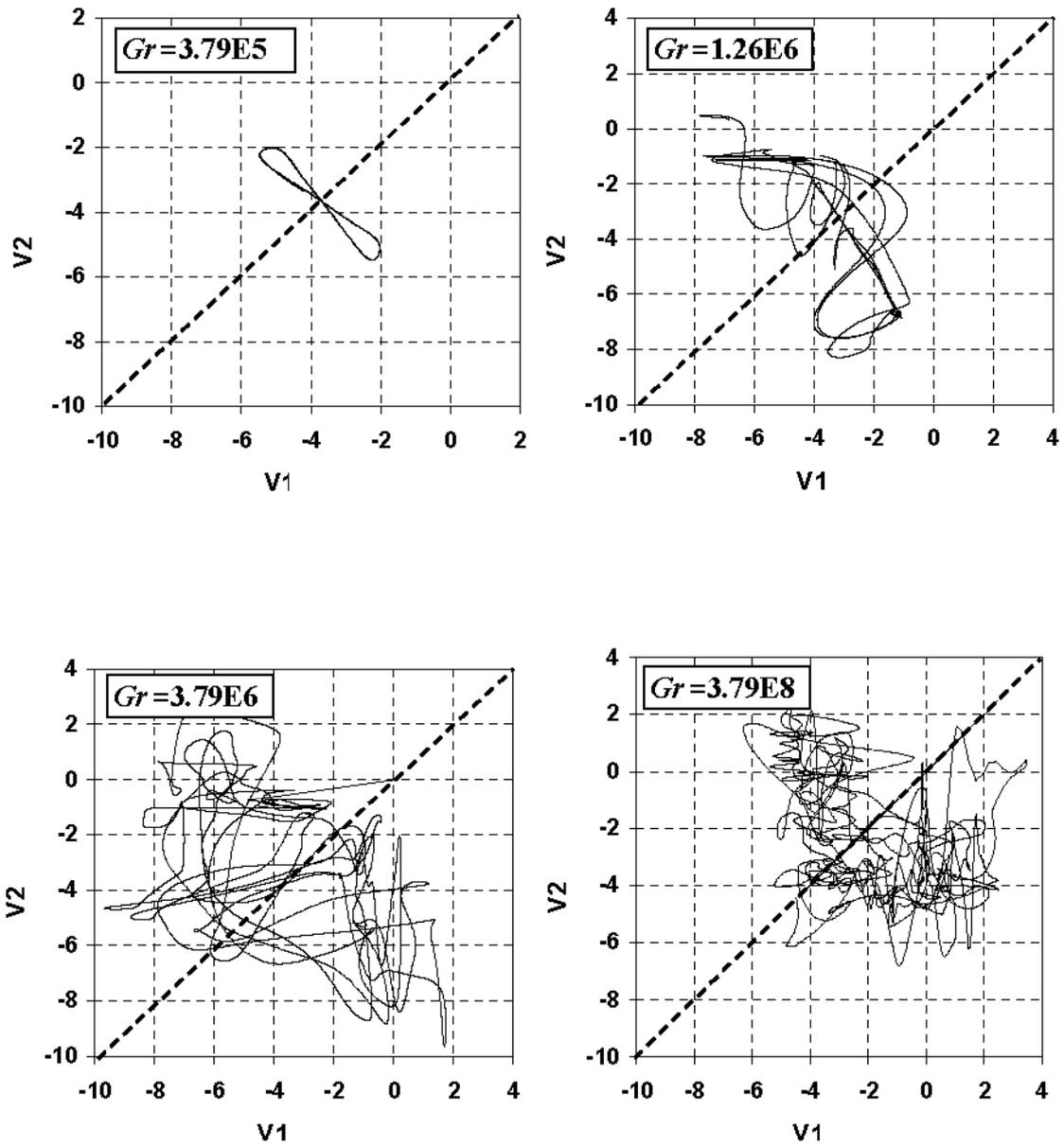


Figura 3.20

Traiettorie del sistema dinamico nel piano v_1 - v_2 per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^5$; $1.26 \cdot 10^6$; $3.79 \cdot 10^6$; $3.79 \cdot 10^8$.

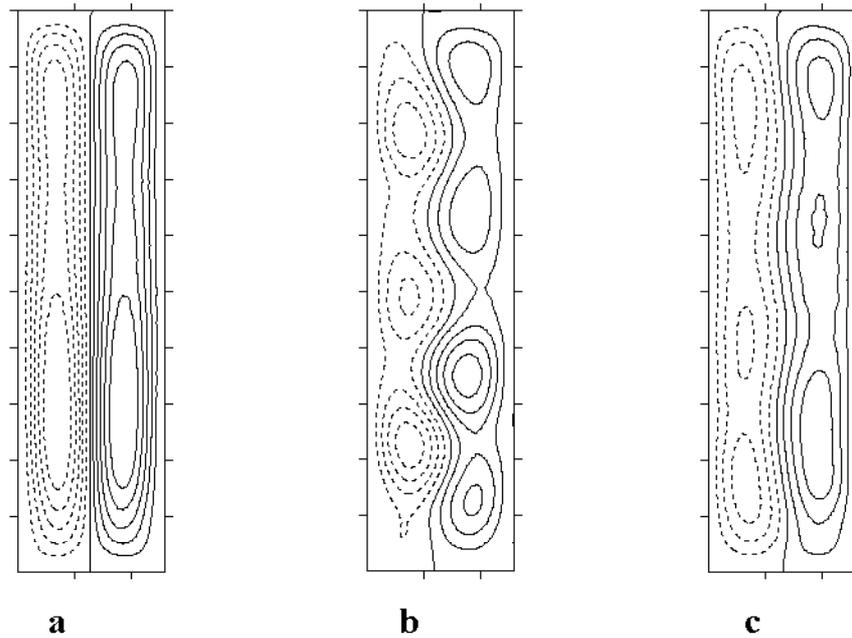


Figura 3.21

Campi medi della funzione di corrente per $AR=4$ e diversi valori del numero di Grashof:
 a) $Gr=3.79 \cdot 10^5$; b) $Gr=1.26 \cdot 10^6$; c) $Gr=3.79 \cdot 10^8$.

Separazione adimensionale tra le linee 0.2.

Linea continua: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria.

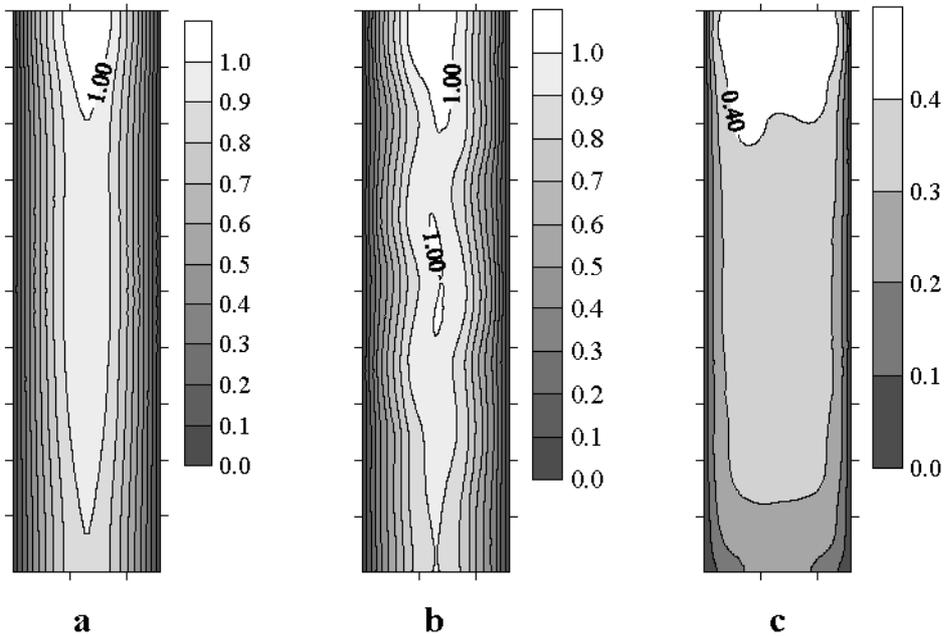


Figura 3.22

Campi di temperatura medi per $AR=4$:

a) $Gr=3.79 \cdot 10^5$; b) $Gr=1.26 \cdot 10^6$; c) $Gr=3.79 \cdot 10^8$.

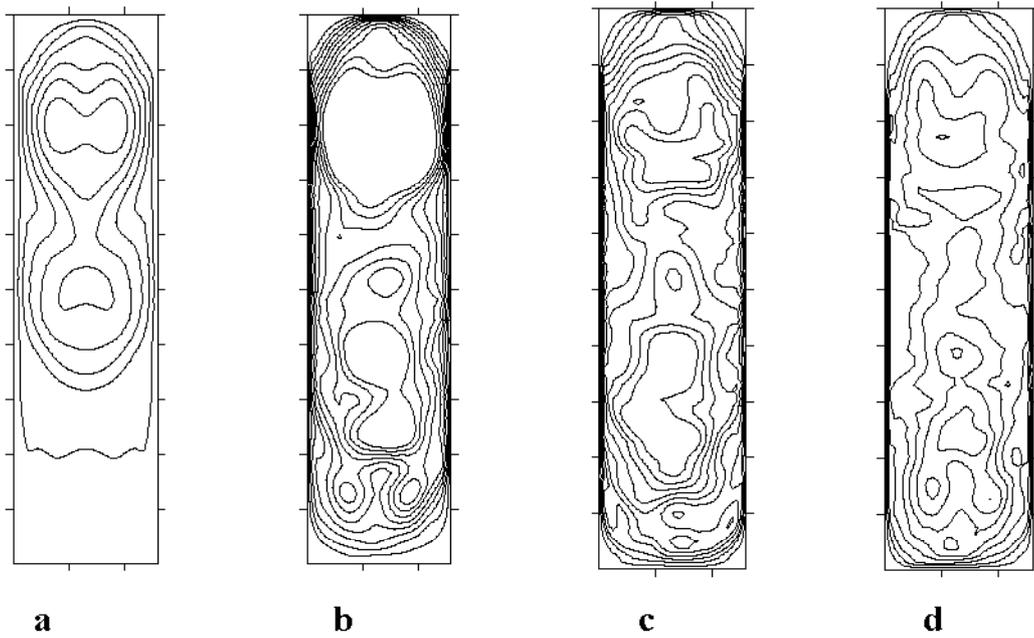


Figura 3.23

Energia delle fluttuazioni di velocità per $AR=4$ ediversi valori del numero di Grashof:
 a) $Gr=3.79 \cdot 10^5$; b) $Gr=3.79 \cdot 10^6$; c) $Gr=3.79 \cdot 10^7$; d) $Gr=3.79 \cdot 10^8$.

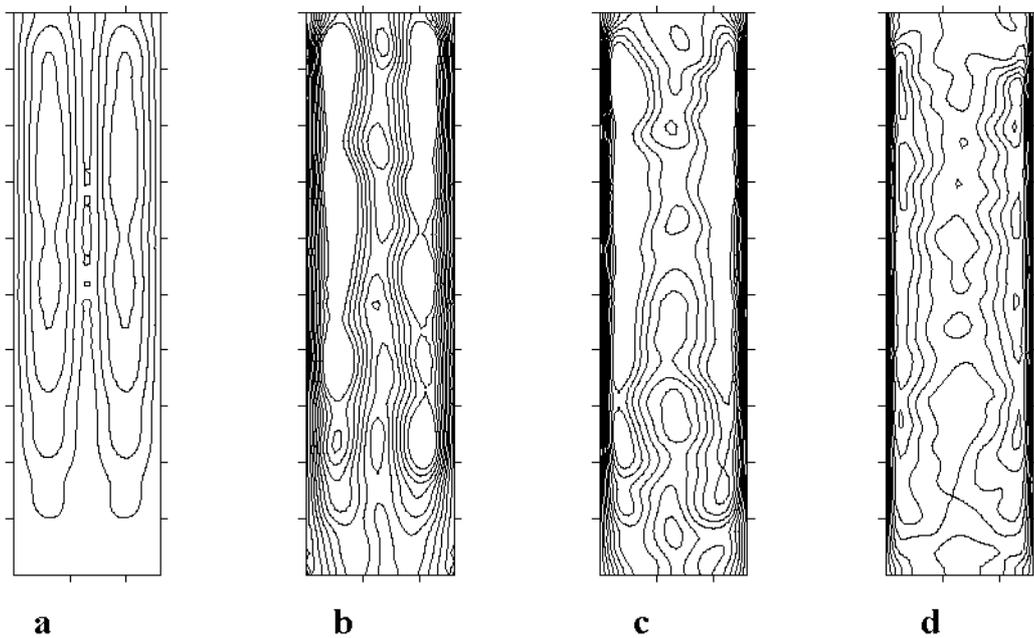
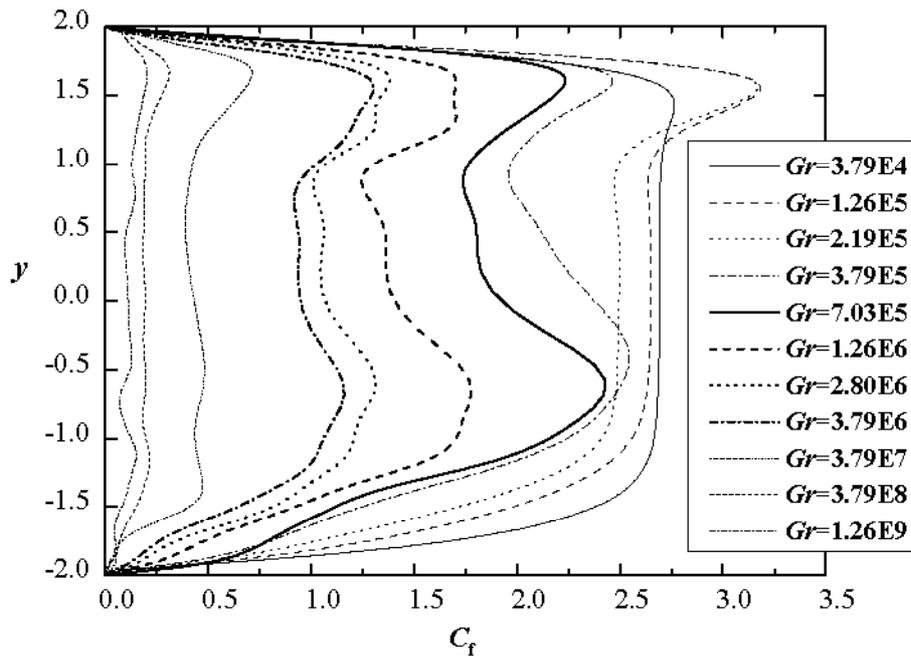
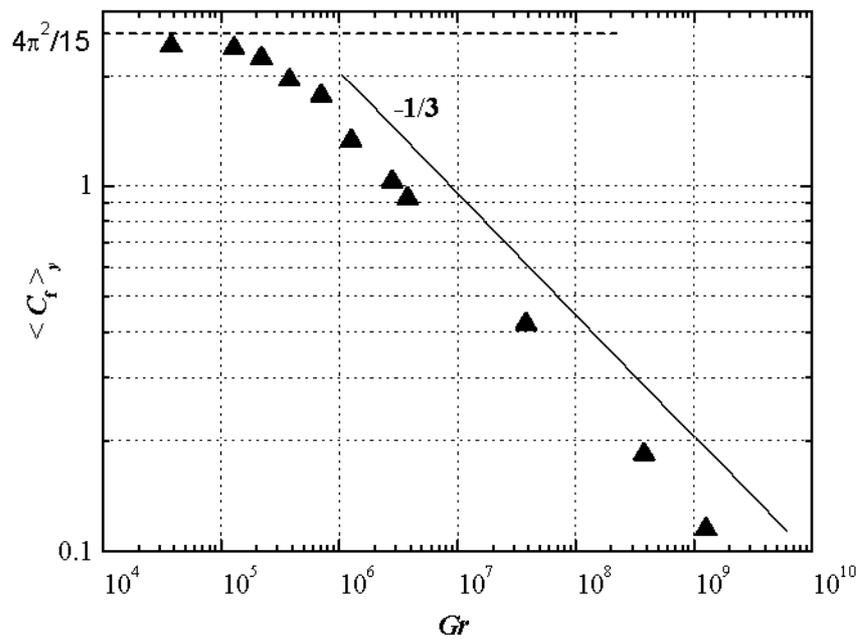


Figura 3.24

Fluttuazioni quadratiche medie della temperatura per $AR=4$ e diversi valori del numero di Grashof:
 a) $Gr=3.79 \cdot 10^5$; b) $Gr=3.79 \cdot 10^6$; c) $Gr=3.79 \cdot 10^7$; d) $Gr=3.79 \cdot 10^8$.



a)

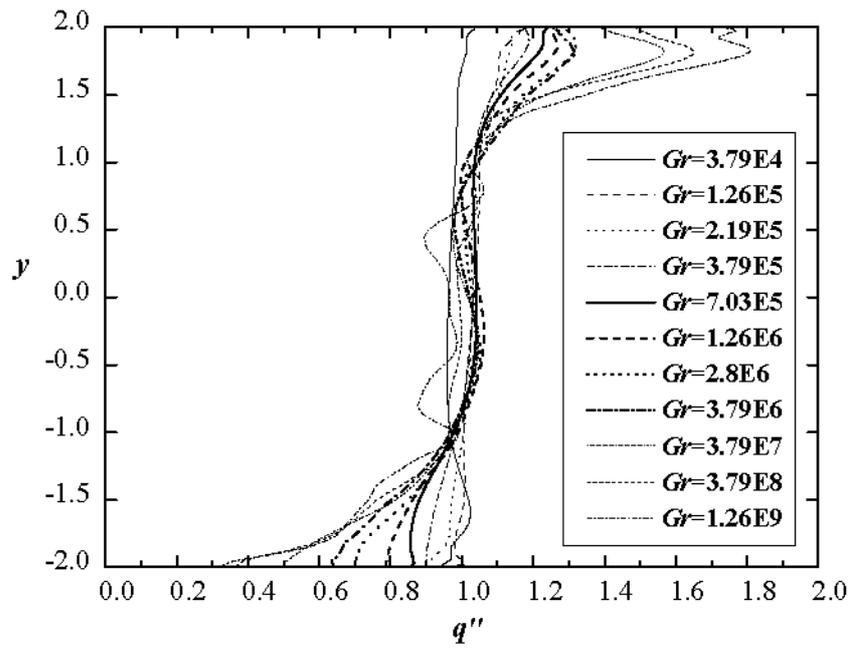


b)

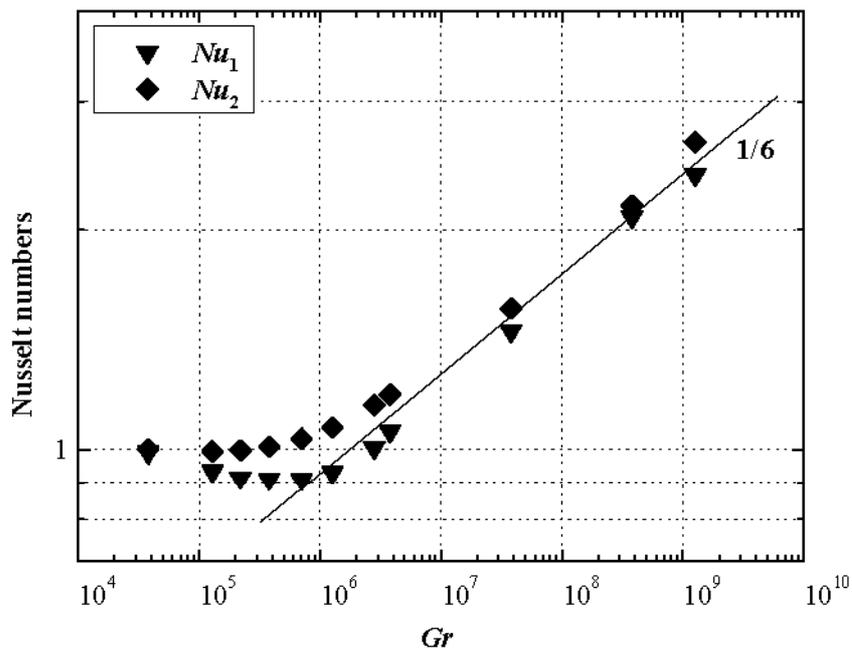
Figura 3.25

Coefficiente di attrito C_f mediato nel tempo per $AR=4$:

- a) Profili lungo le pareti verticali per tutti i casi studiati. Sono mostrati i valori mediati tra la parete destra e quella sinistra.
- b) Dipendenza della media lungo y , $\langle C_f \rangle_y$, dal numero di Grashof.



a)



b)

Figura 3.26

Scambio di calore per $AR=4$:

- c) Profili mediati nel tempo del flusso termico di parete q'' (normalizzato rispetto al suo valore medio) lungo le pareti verticali per tutti i casi studiati. Sono mostrati i valori mediati tra la parete destra e quella sinistra.
- d) Dipendenza dei numeri di Nusselt Nu_1 and Nu_2 dal numero di Grashof.

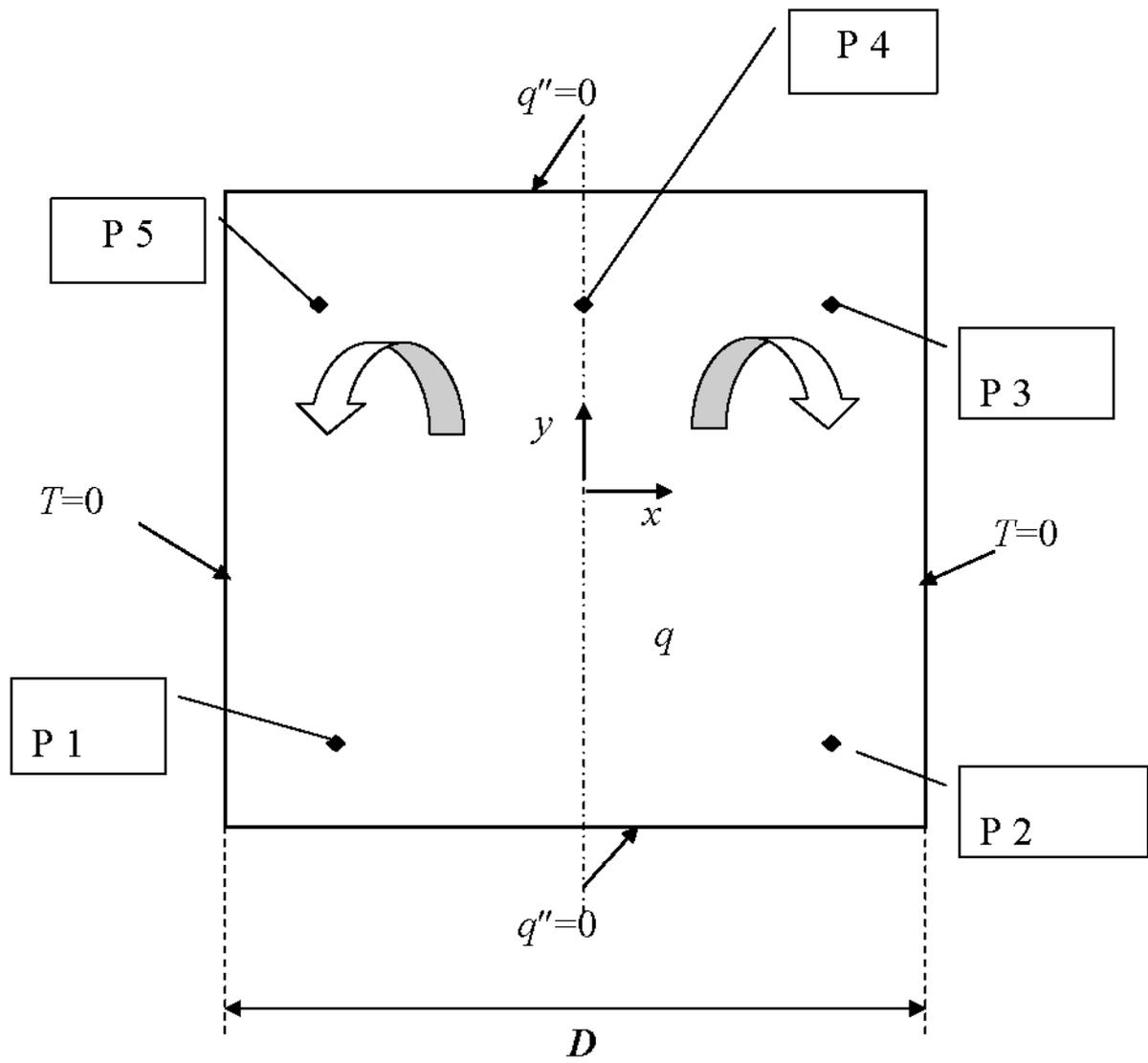
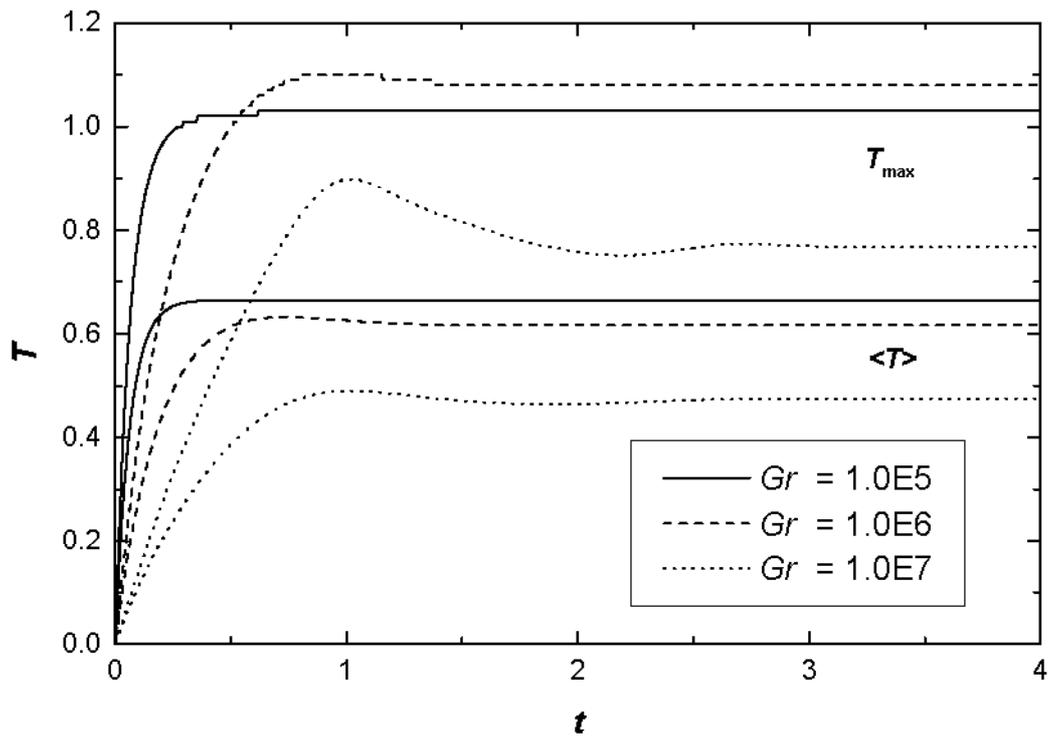
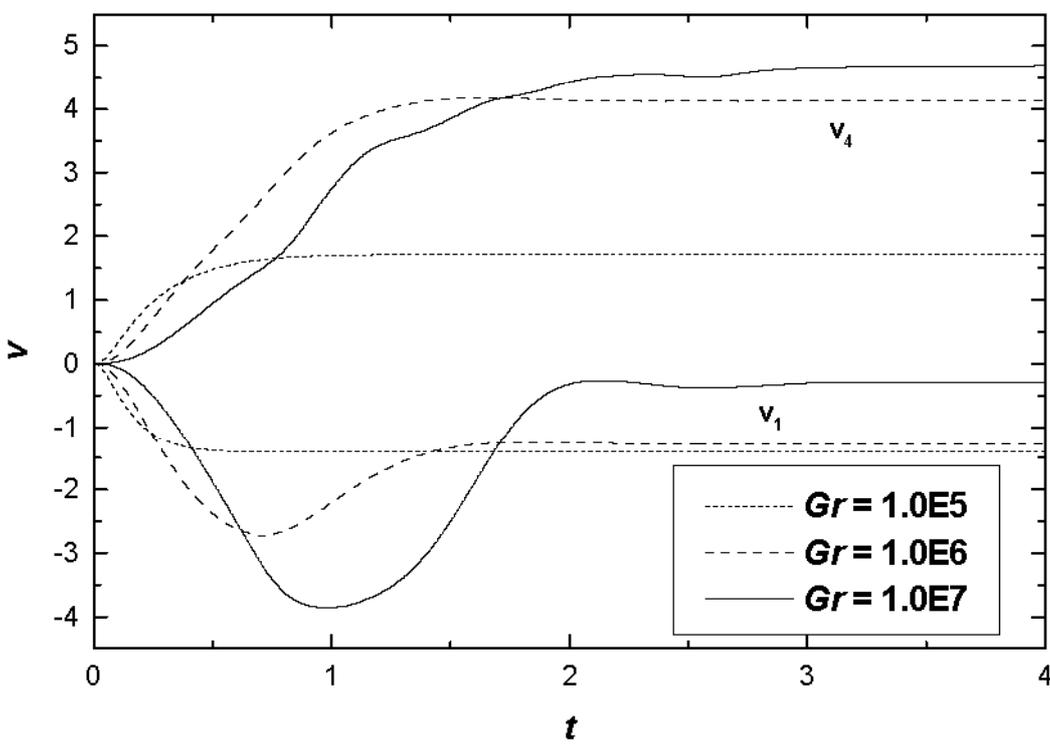


Figura 4.1

Schema della geometria e notazione usata per la cavità quadrata ($AR=1$).



a)



b)

Figura 4.2

Temperature massima e media (a) e velocità nei punti di monitoraggio P1 e P4 (b) per tutti i casi laminari simmetrici studiati ad $AR=1$.

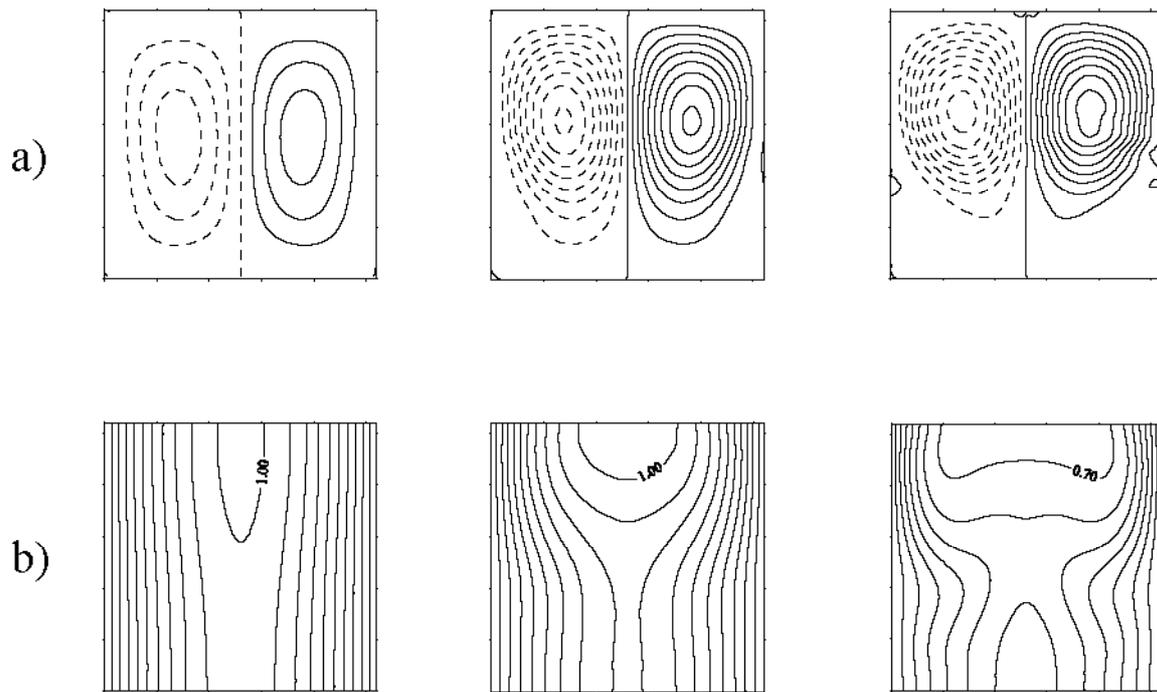
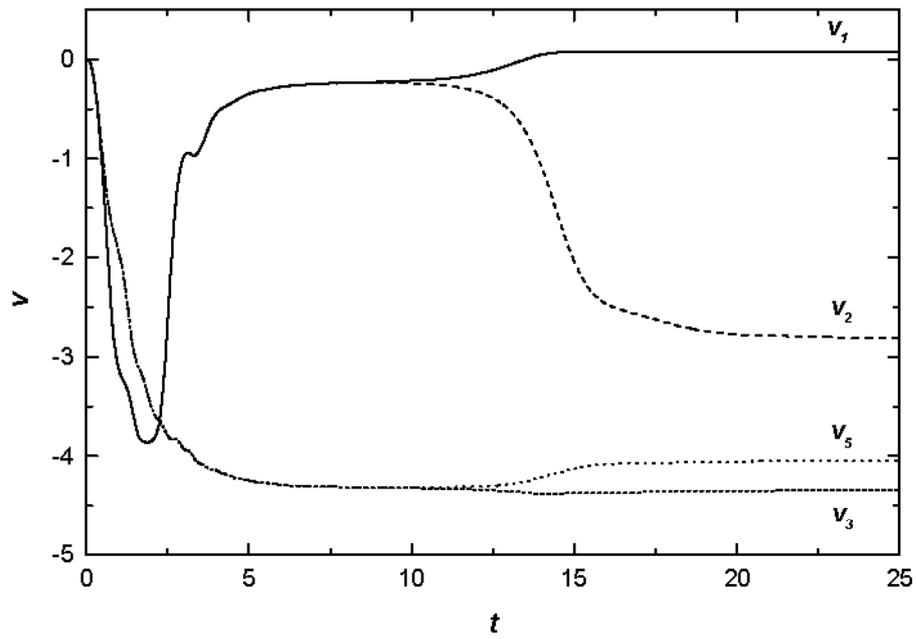


Figura 4.3

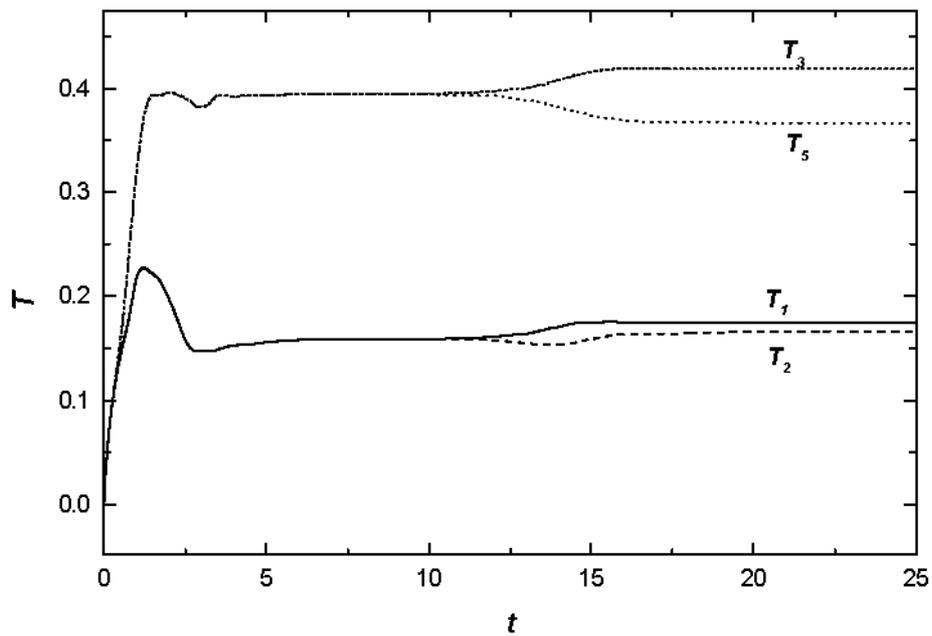
Campi di moto e di temperatura per i casi laminari stazionari simmetrici ad $AR=1$. Da sinistra a destra: $Gr=10^5$, $Gr=10^6$ e $Gr=10^7$.

a) funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.1; linea continua: circolazione oraria, linea tratteggiata: circolazione antioraria.

b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.1



(a)



(b)

Figura 4.4

Velocità verticale (a) e temperatura (b) per il caso ad $AR=1$ e $Gr=3 \cdot 10^7$ nei punti di monitoraggio simmetrici rispetto alla mezzeria P1, P2 e P3, P5.

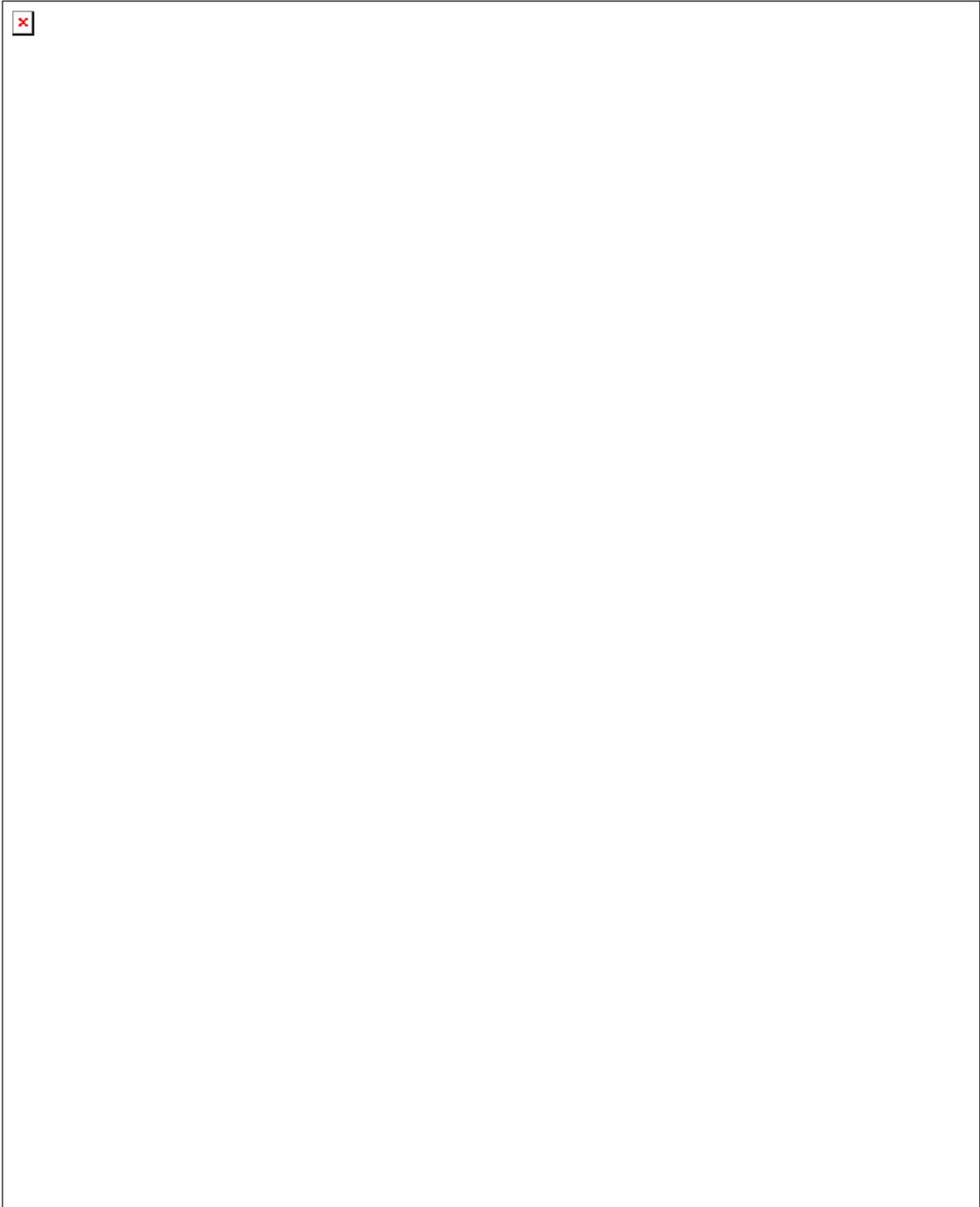


Figura 4.5

Transitorio per il caso $AR=1$, $Gr=3 \cdot 10^7$. L'intervallo tra le istantanee (ad eccezione delle prime due) è di 2.8 unità τ_0 . Si osservi la rottura di simmetria bilaterale per $t \gtrsim 11$.

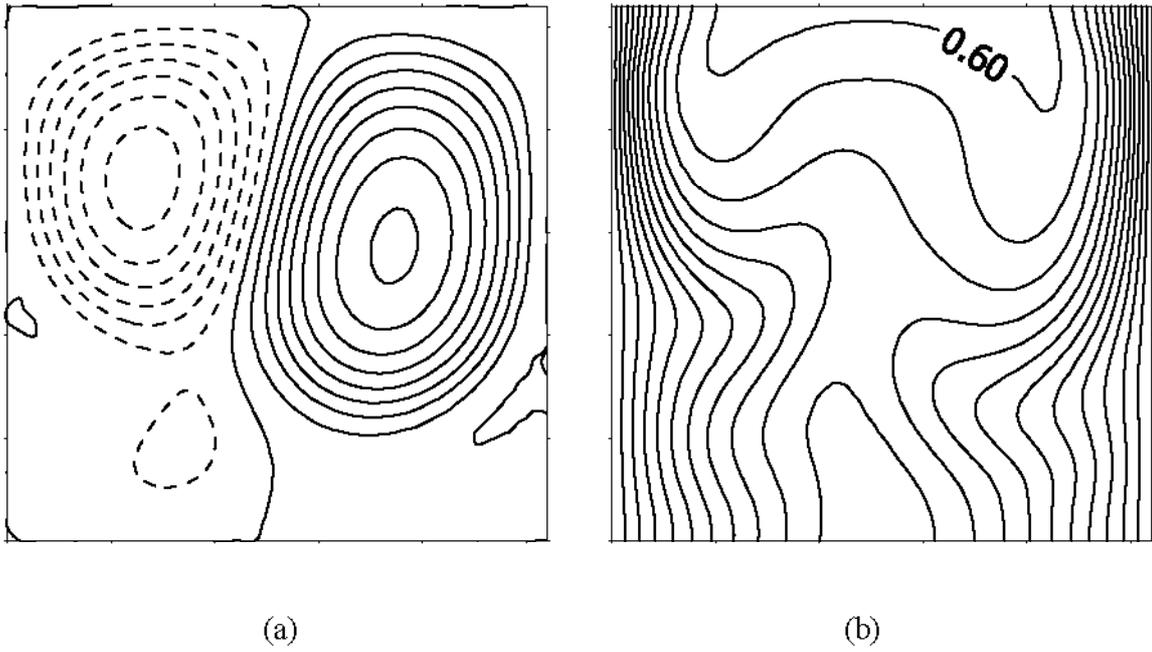


Figura 4.6

Campi di moto e di temperatura per il caso $AR=1$, $Gr=3 \cdot 10^7$ (stazionario asimmetrico).

- a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.1. Linea continua: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria.
- b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.05.

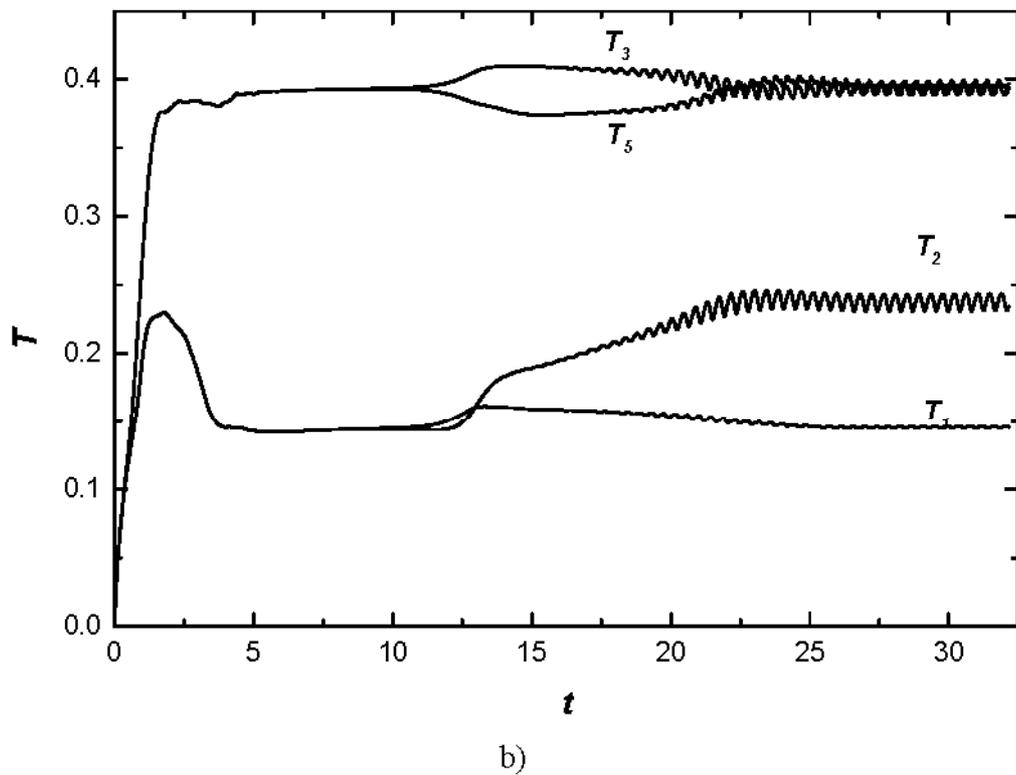
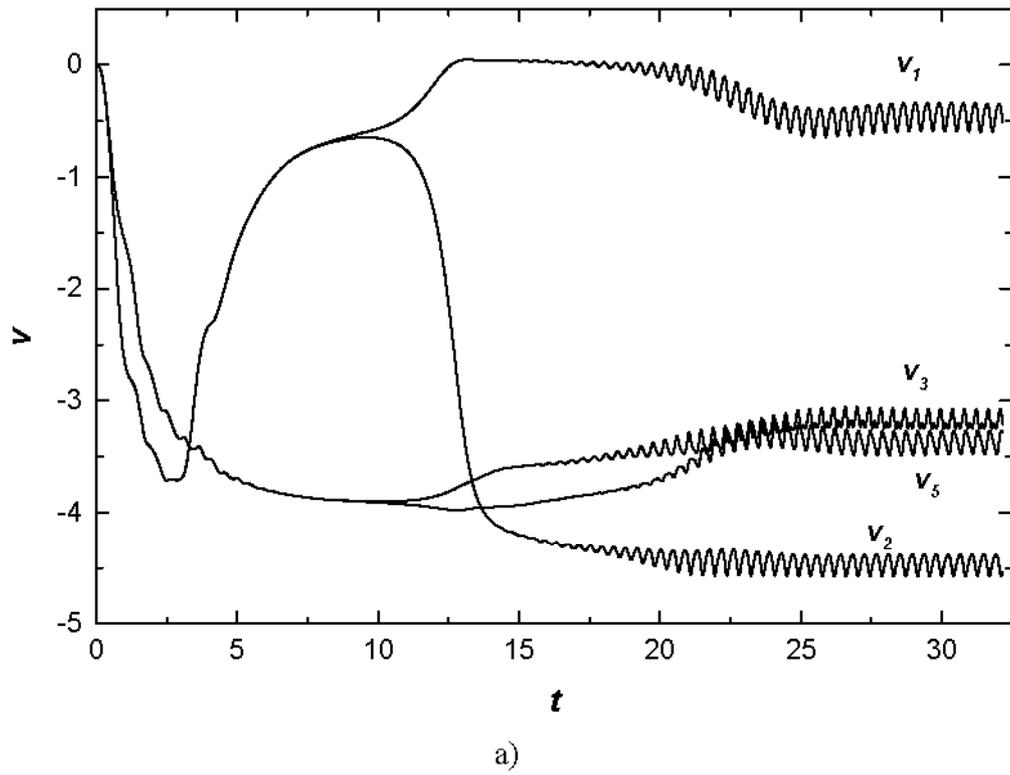


Figura 4.7

Velocità verticale (a) e temperatura per il caso $AR=1$, $Gr=5.4 \cdot 10^7$ (moto periodico) nei punti di monitoraggio P1, P2 e P3, P5 posti simmetricamente rispetto alla mezzeria.

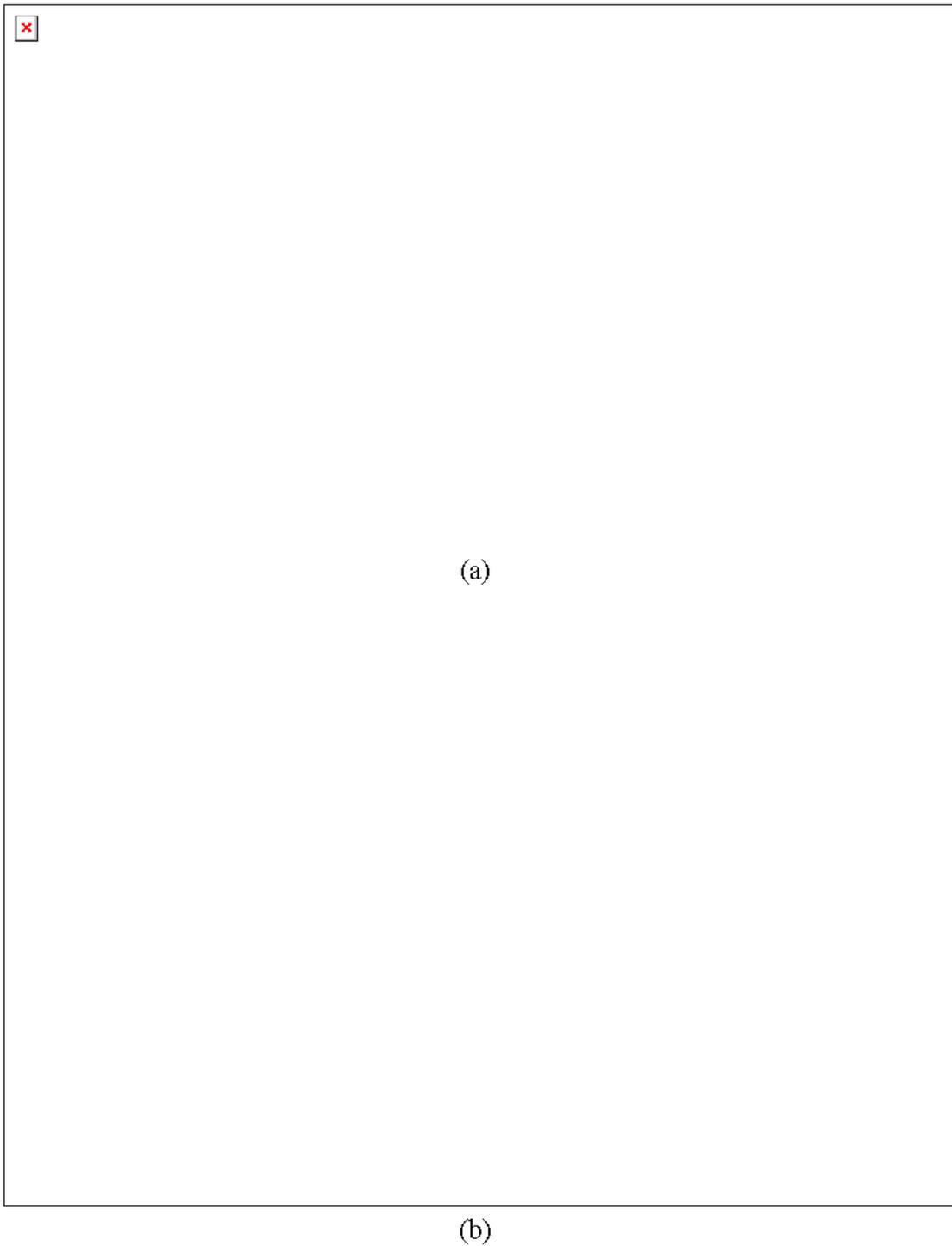


Figura 4.8

Differenza tra campi istantanei e medi per il caso $AR=1$, $Gr = 5.4 \cdot 10^7$ dopo che si è stabilizzata la periodicità. L'intervallo adimensionale tra le istantanee è ~ 0.07 (unità τ_0), così che la sequenza copre un intero periodo (~ 0.5 unità τ_0).

a) Funzione di corrente, intervallo adim. 0.001. Linea continua: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria.

b) Isotherme, intervallo adim. 0.001. Linea continua: $T \geq \bar{T}_{max}/2$; linea tratteggiata: $T \leq \bar{T}_{max}/2$.

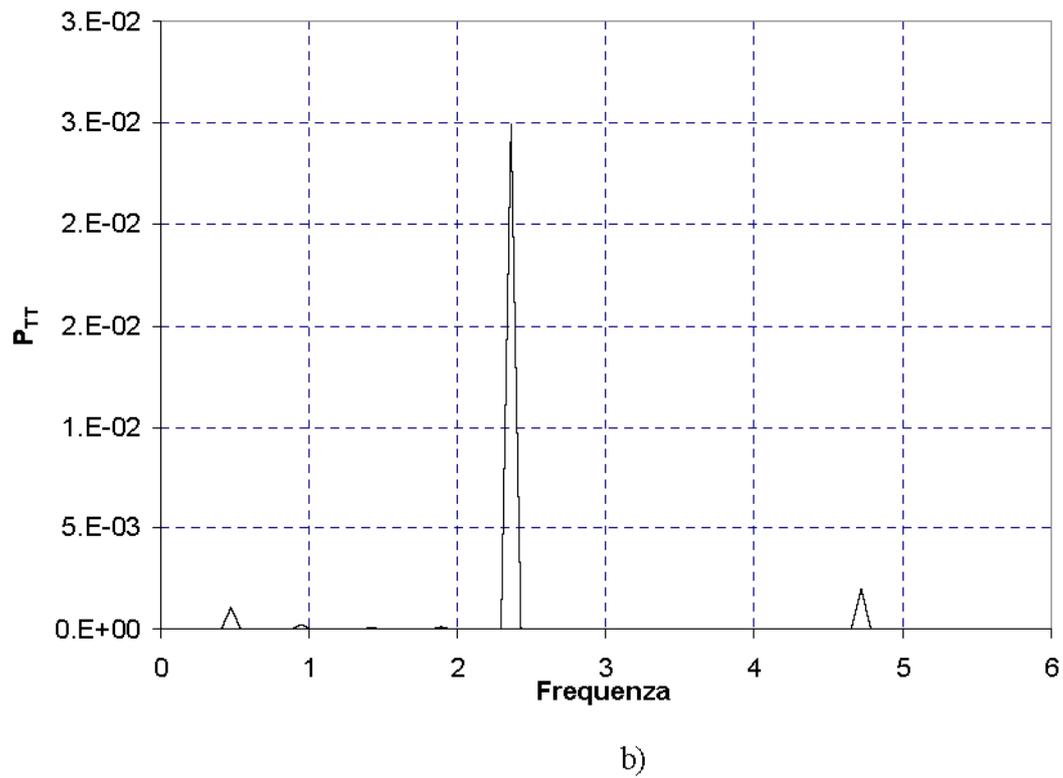
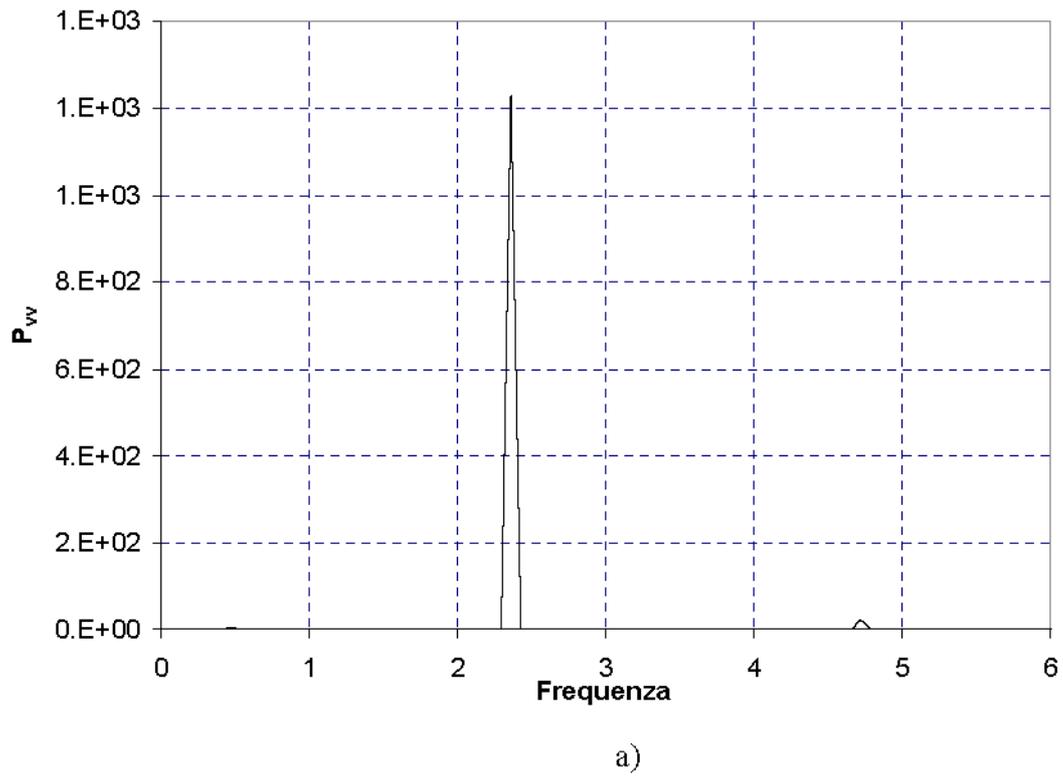
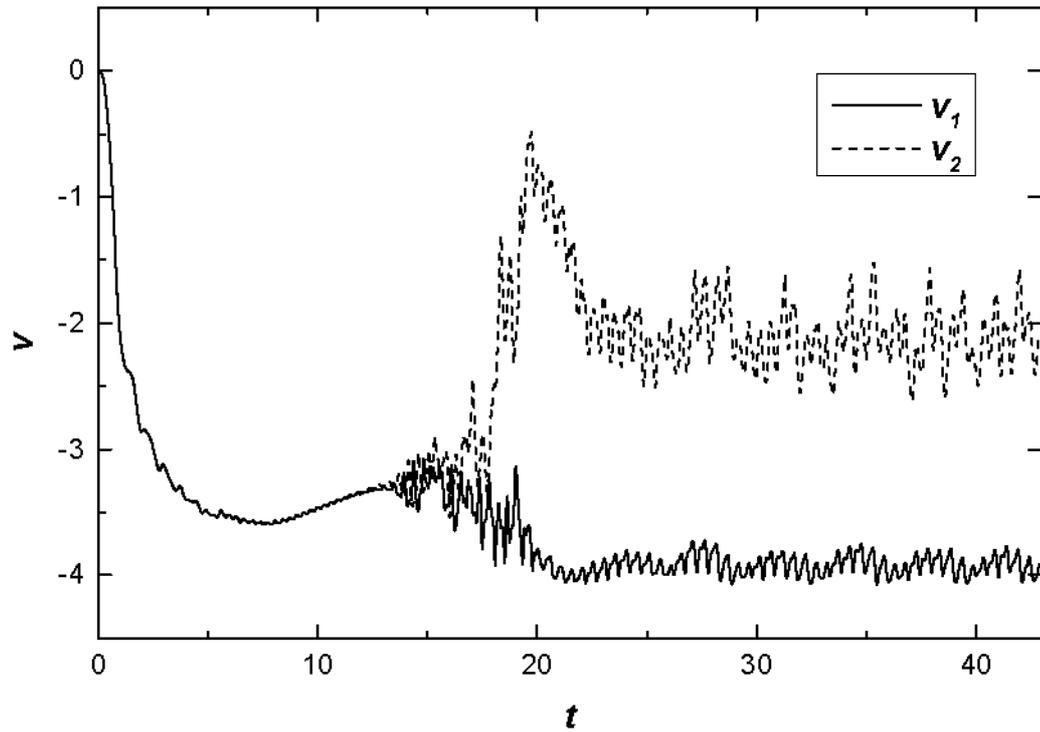
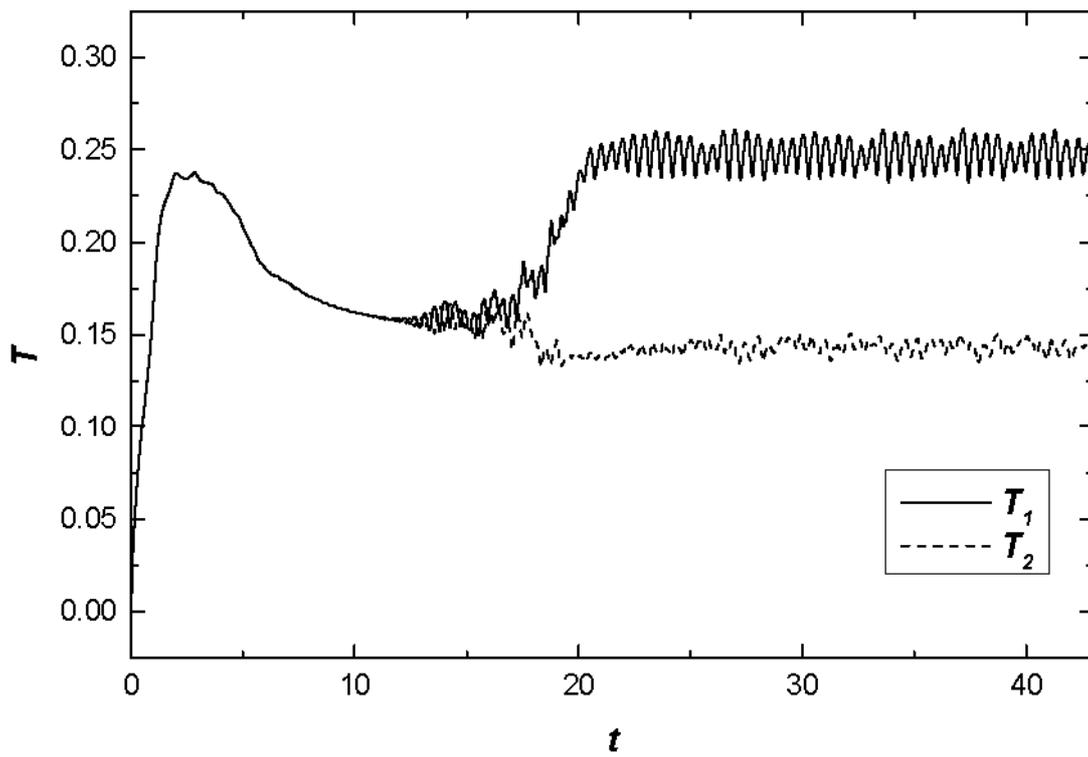


Figura 4.9

Spettri normalizzati della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) nel punto di monitoraggio P1 per il caso $AR=1$, $Gr=5.4 \cdot 10^7$ (moto periodico).



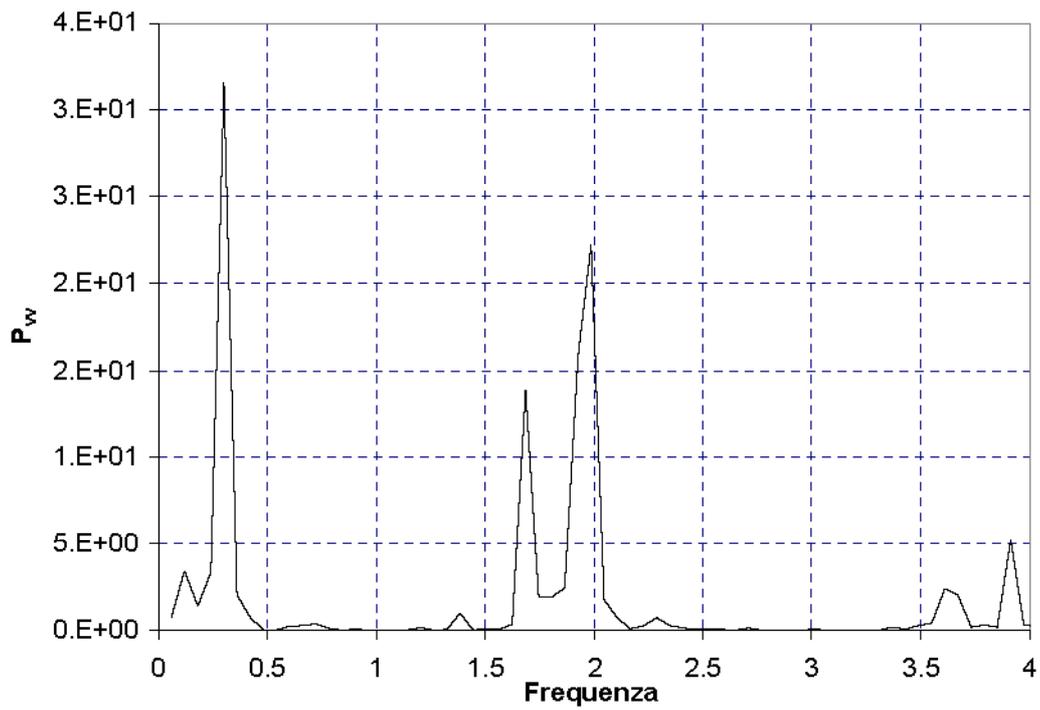
a)



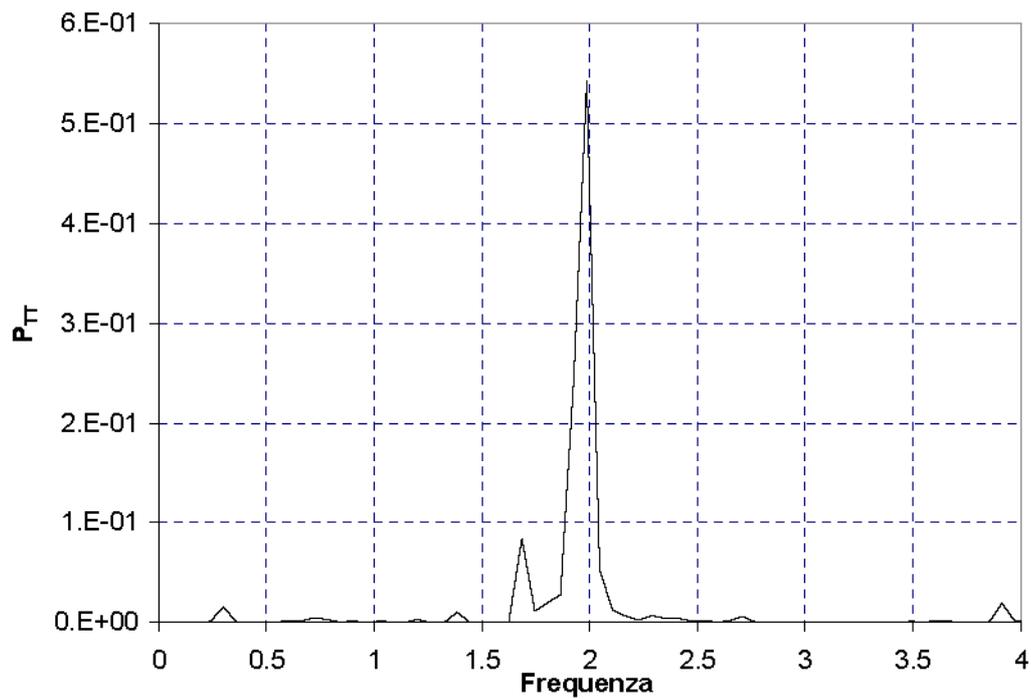
b)

Figura 4.10

Velocità verticale (a) e temperatura (b) per il caso $AR=1$, $Gr=10^8$ nei punti di monitoraggio P1 e P2 (simmetrici rispetto alla mezzeria)



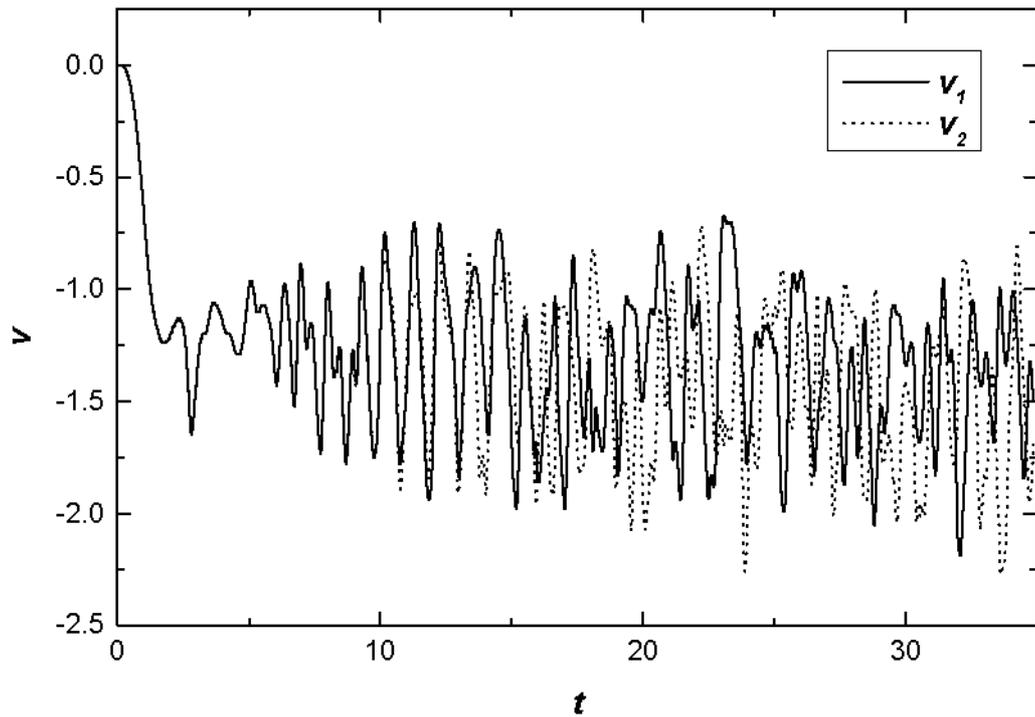
a)



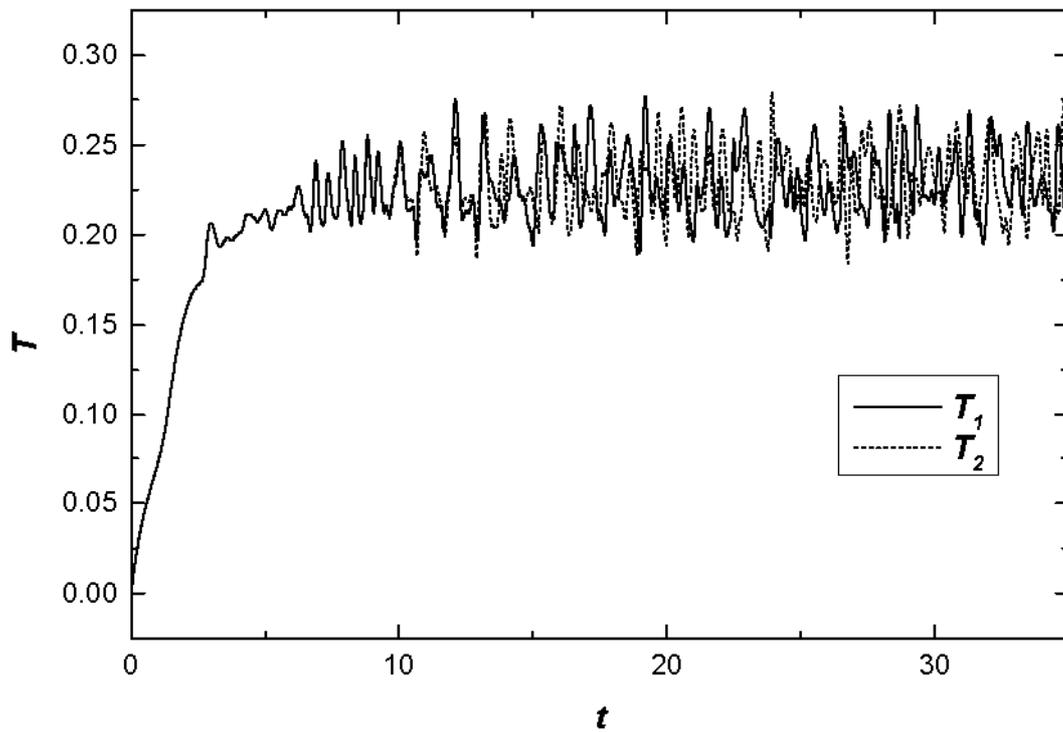
b)

Figura 4.11

Spettri normalizzati per la velocità verticale v (a) e per la temperatura T (b) nel punto di monitoraggio P1 per $AR=1$, $Gr=10^8$ (moto caotico).



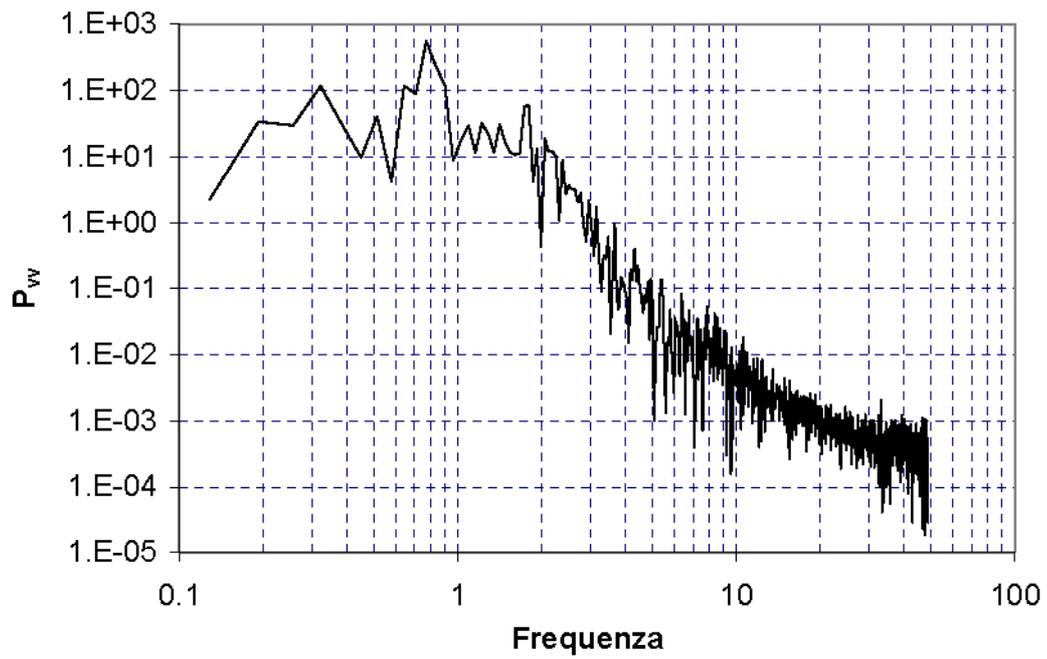
a)



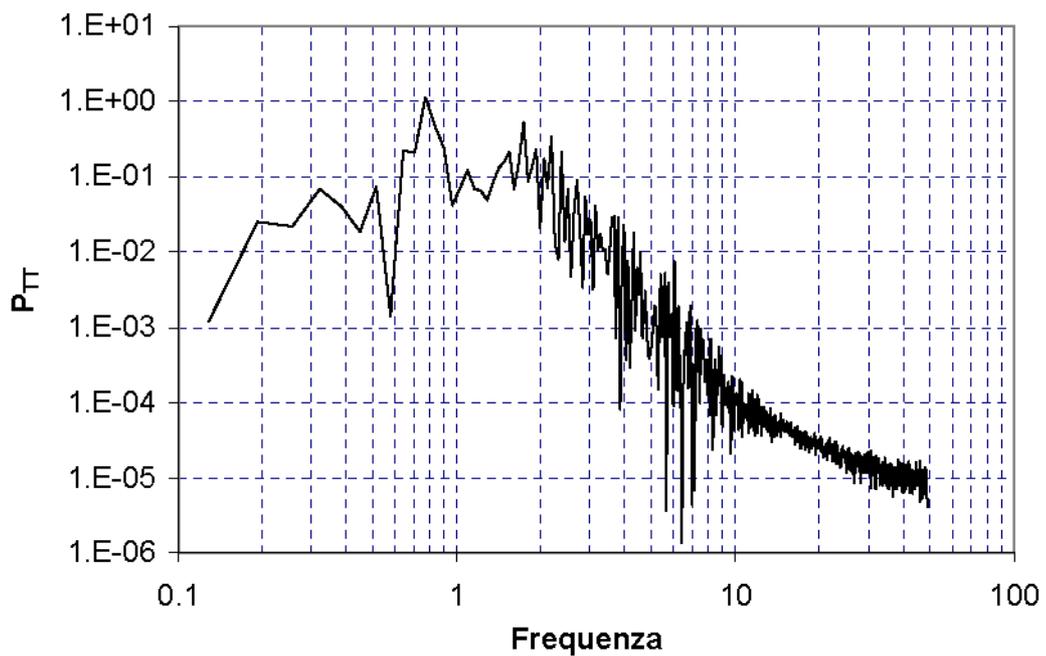
b)

Figura 4.12

Velocità verticale (a) e temperatura (b) per $AR=1$, $Gr=10^9$ (moto caotico), nei punti di monitoraggio P1 e P2 (simmetrici rispetto alla mezzeria).



a)



b)

Figura 4.13

Spettri normalizzati (in scala doppiamente logaritmica) della velocità verticale v (a) e della temperatura T (b) nel punto di monitoraggio P1 per il caso $AR=1$, $Gr=10^9$ (moto caotico).

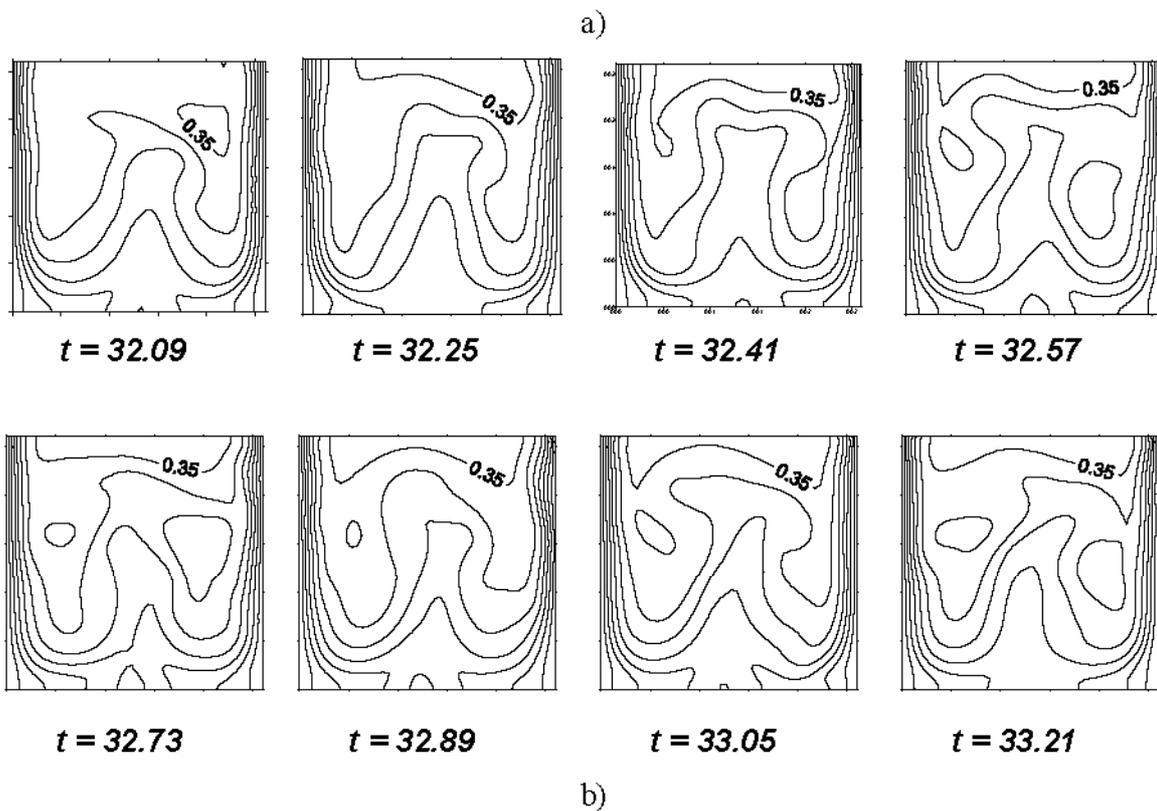
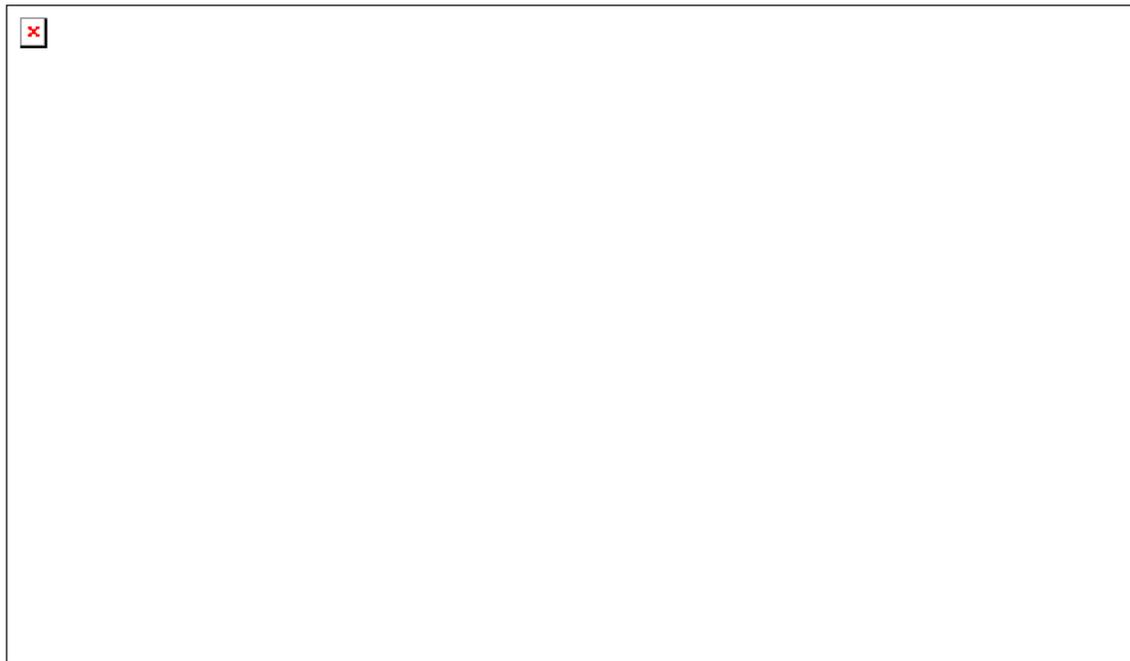


Figura 4.14

Campi di moto e di temperatura istantanei per il caso $AR=1$, $Gr=10^9$ (moto caotico) dopo che è terminato il transitorio iniziale. L'intervallo tra le istantanee è ~ 0.16 (unità τ_0), così che le sequenze coprono all'incirca un periodo principale.

a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.1. Linea continua: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria.

b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.05.

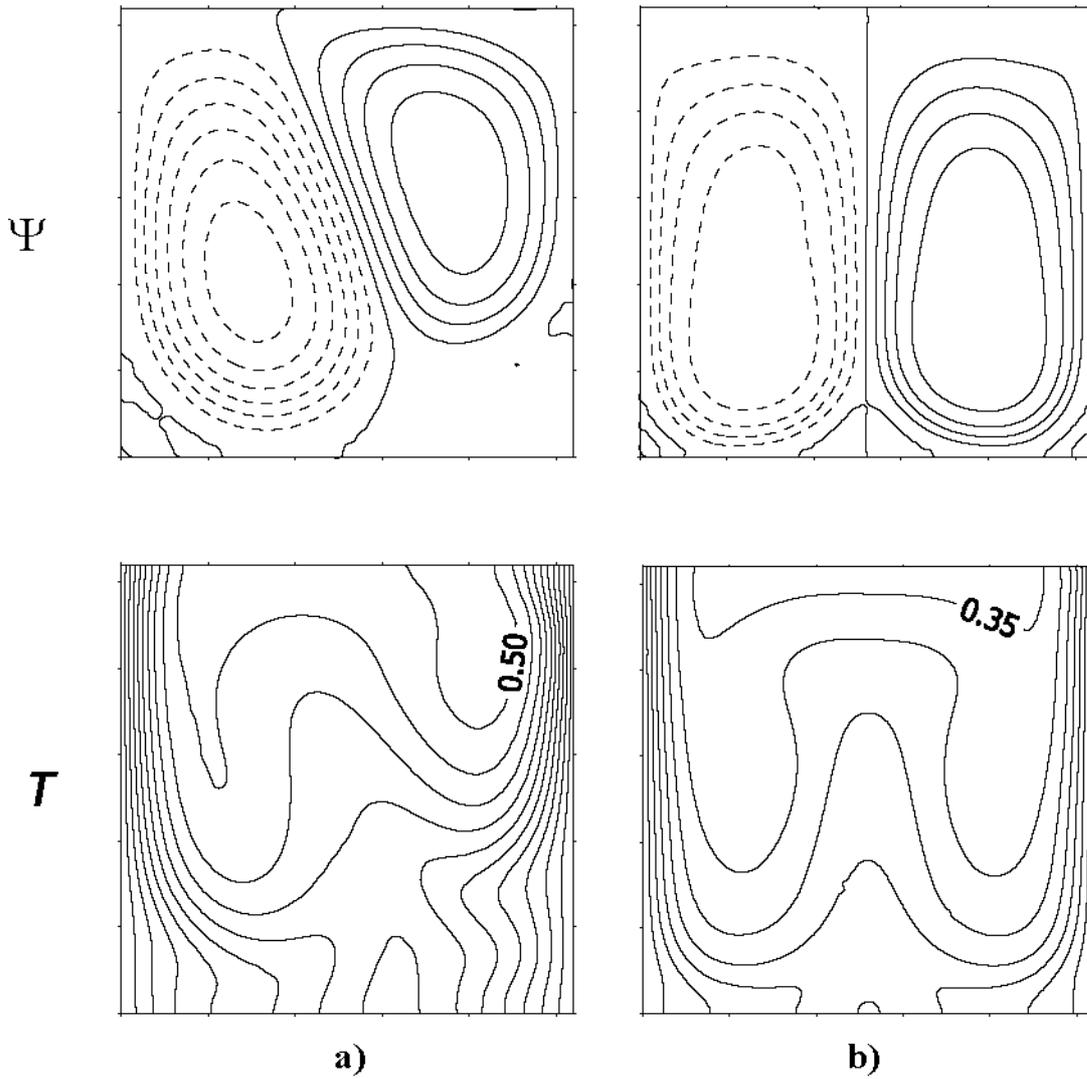


Figura 4.15

Campi di moto e di temperatura mediati nel tempo per i due casi caotici ad $AR=1$, $Gr=10^8$ (a) e 10^9 (b)

In alto: funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.1. Linea continua: circolazione oraria. Linea tratteggiata: circolazione antioraria.

In basso: isoterme, intervallo adimensionale 0.1.

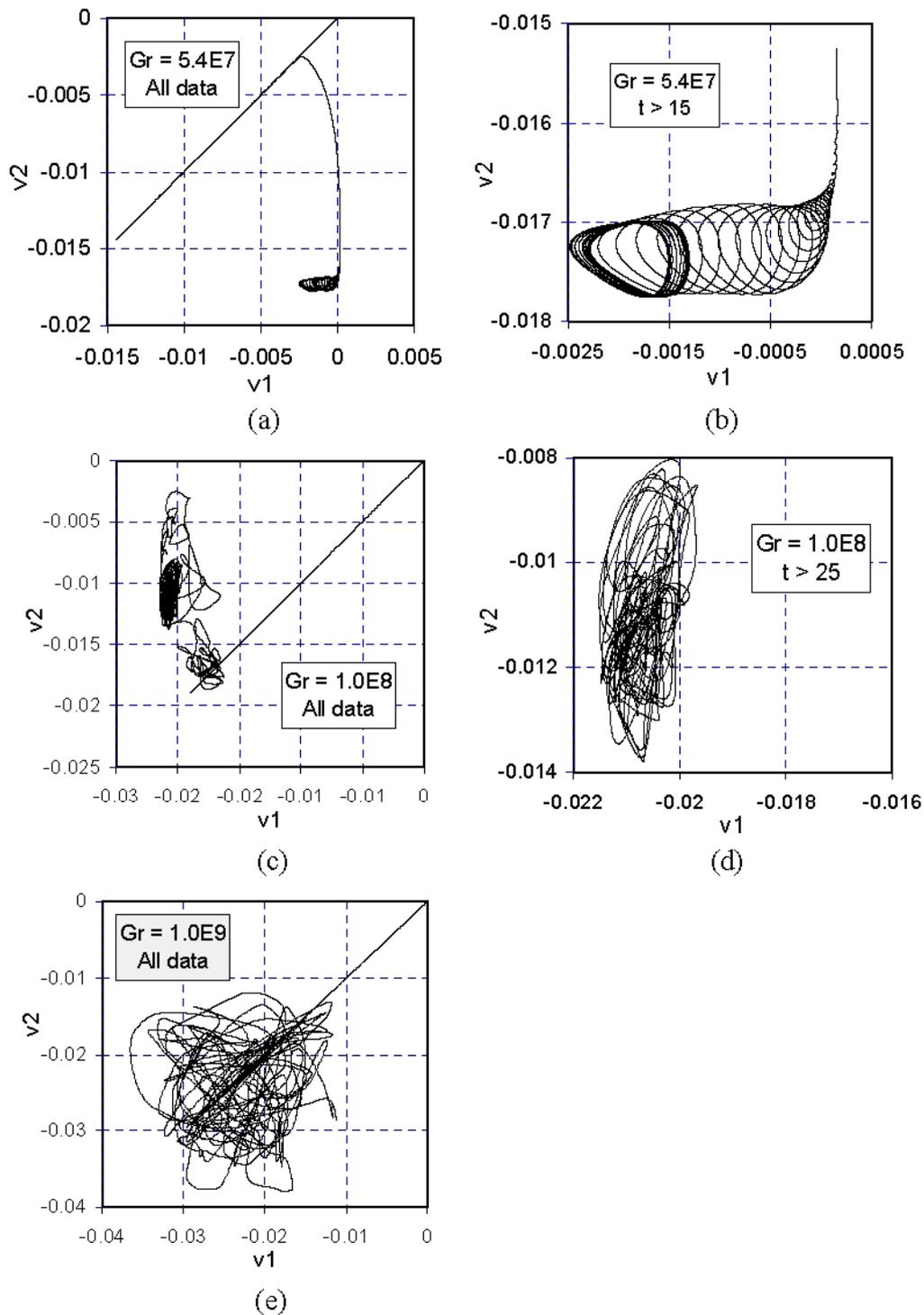
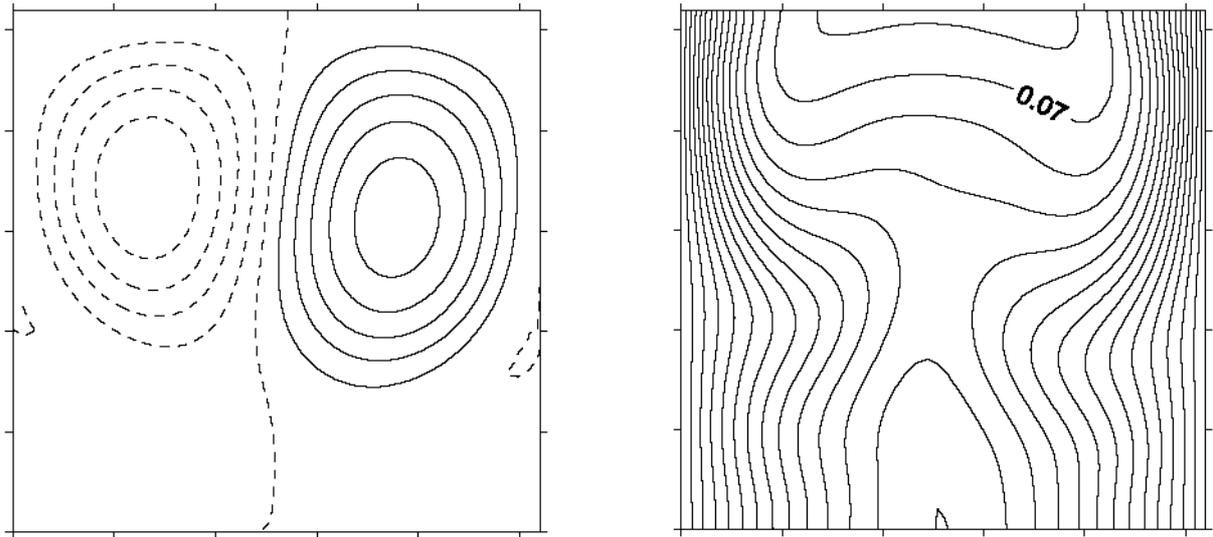
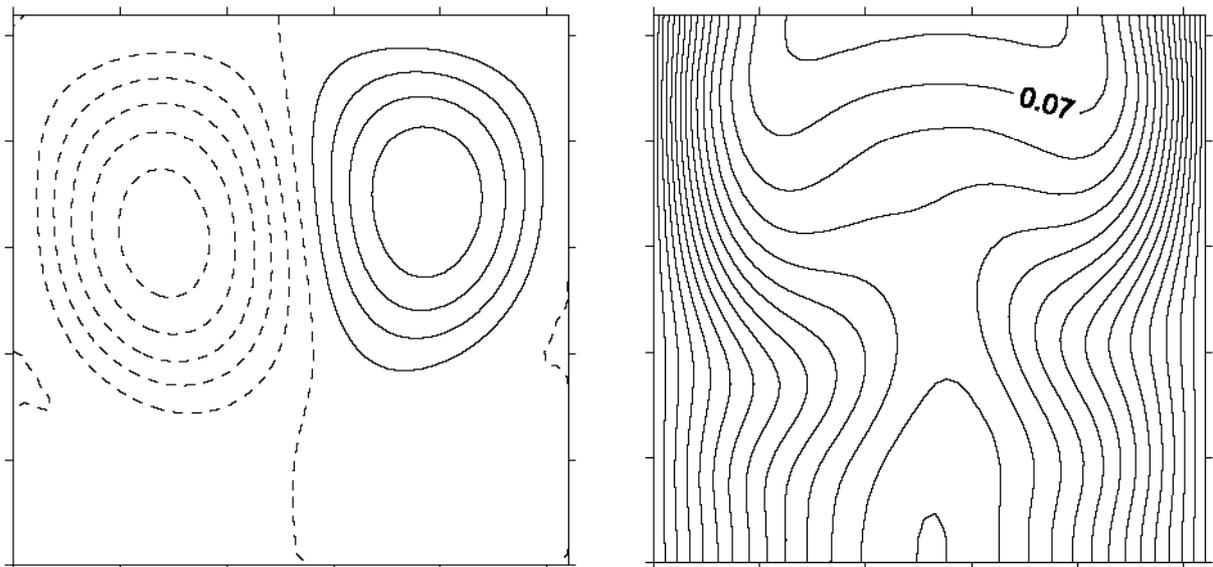


Figura 4.16

Traiettorie del sistema dinamico nel piano v_1 - v_2 per $AR=1$ e diversi valori di Gr :
 a, b) $Gr=5.4 \times 10^7$ (moto periodico);
 c, d) $Gr=10^8$ (moto caotico incipiente, a media asimmetrica);
 e) $Gr=10^9$ (moto caotico sviluppato, o “turbolento”, a media simmetrica).



a)



b)

Figura 4.17

Riduzione di densità di potenza a gradino (a) e a rampa (b) da $Gr=10^8$ a $Gr=10^7$ per $AR=1$.
 Le condizioni iniziali per entrambi i casi sono simili a quelle riportate in figura 4.15a.
 A sinistra: funzione di corrente. Intervallo adimensionale (rispetto a $Gr=10^8$) 0.05.
 A destra: isoterme, intervallo adimensionale (rispetto a $Gr=10^8$) 0.005. Linea continua:
 circolazione oraria. Linea tratteggiata: circolazione antioraria.

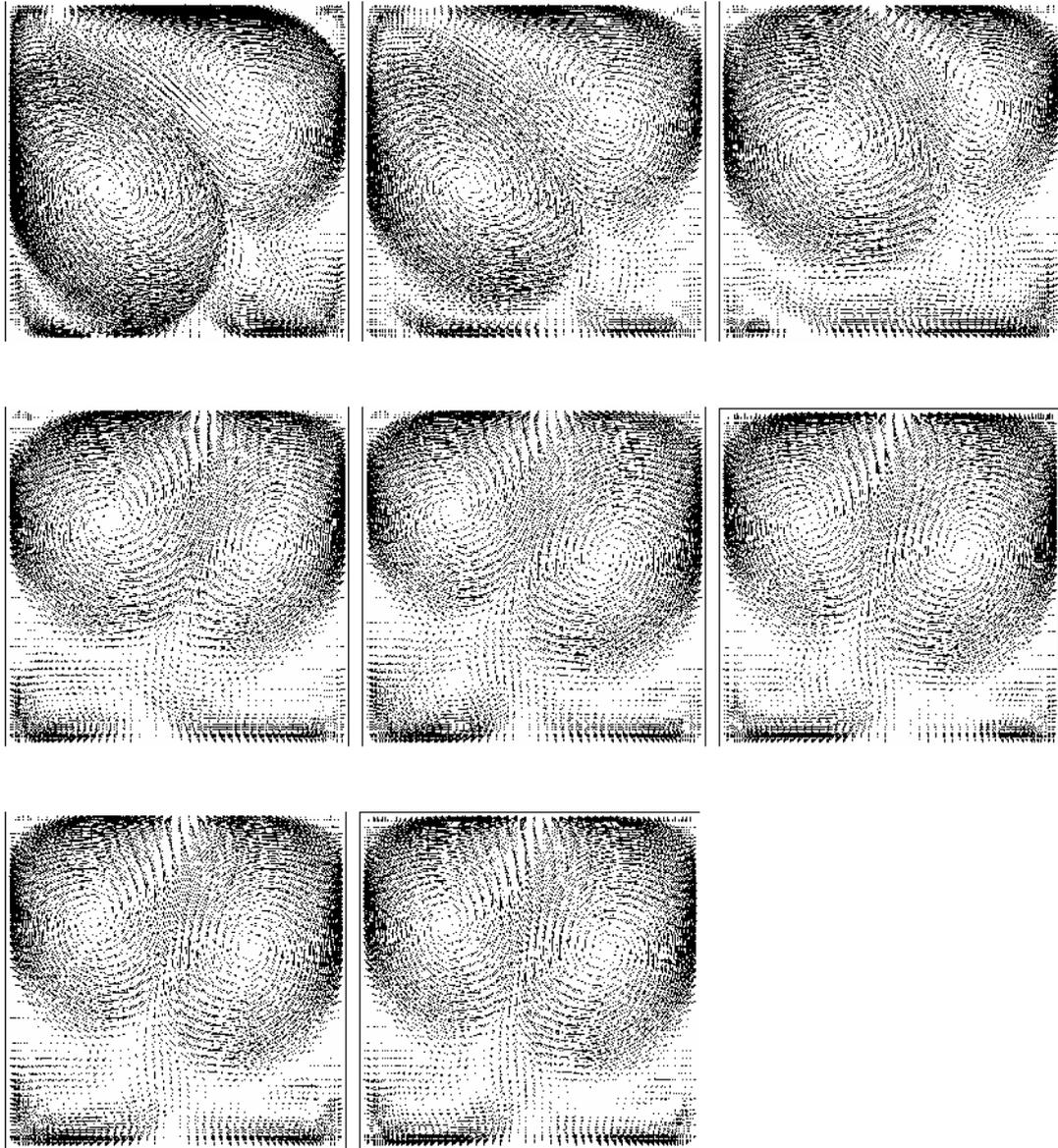


Figura 4.18

Transitorio nella forma di diagrammi vettoriali per la discesa di potenza a gradino da $Gr=10^8$ a $Gr=10^7$ ($AR=1$).

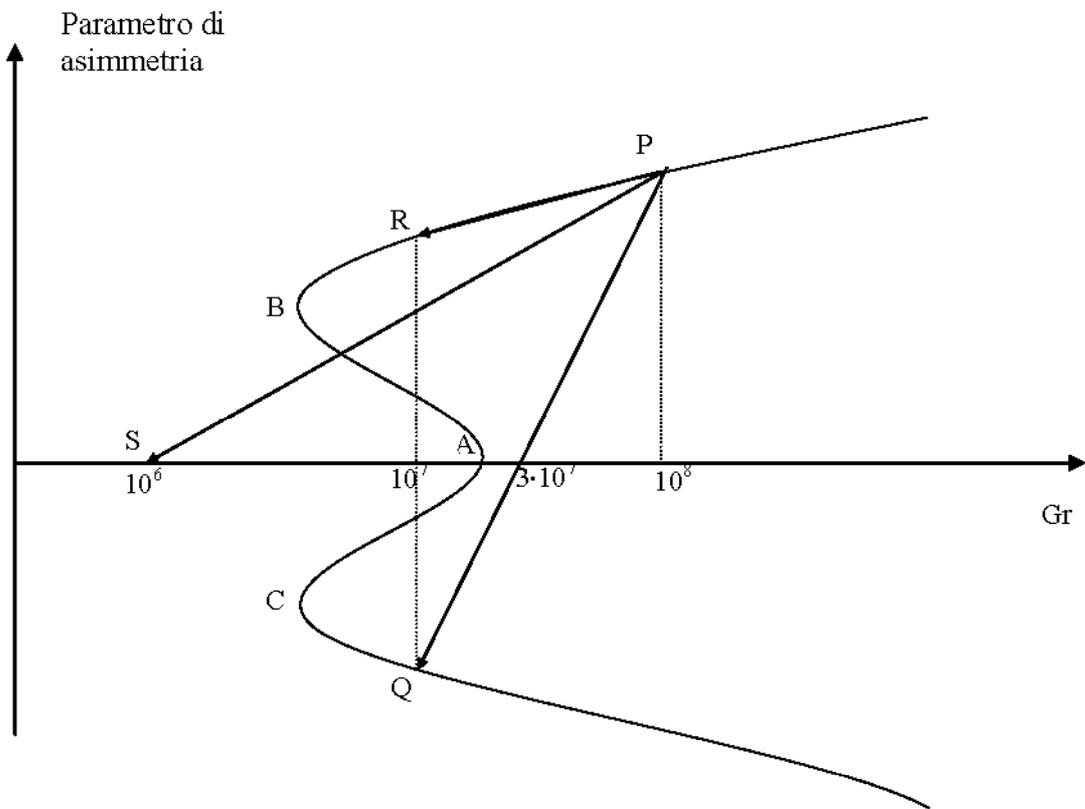
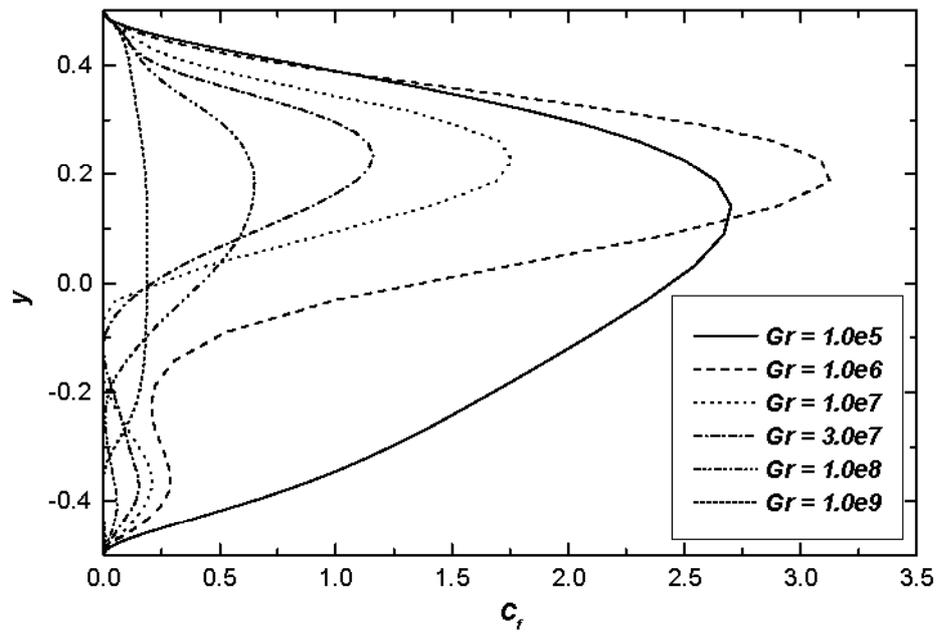
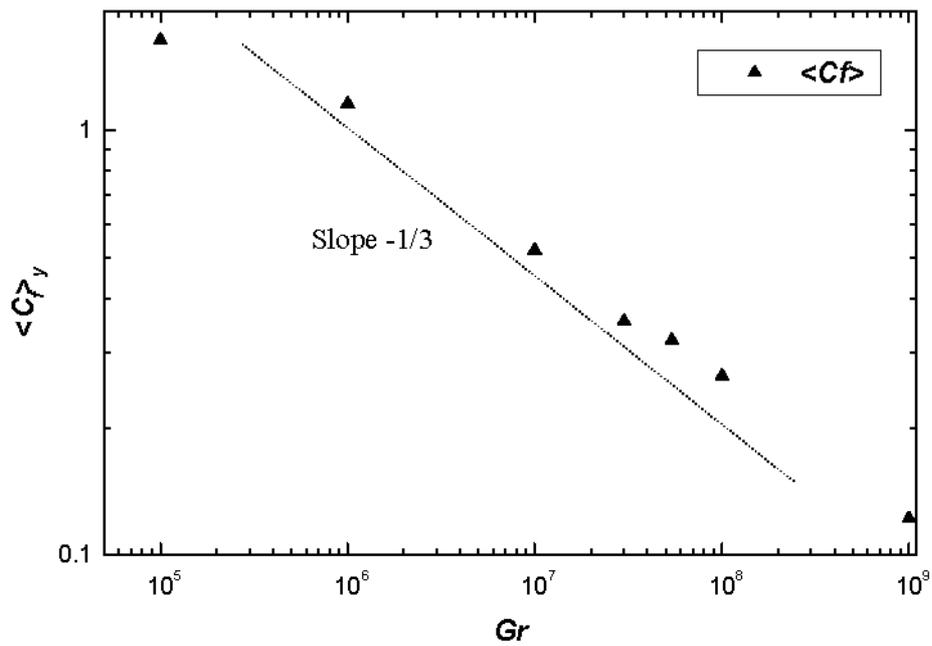


Figura 4.19

Schema qualitativo della biforcazione sub-critica.



a)



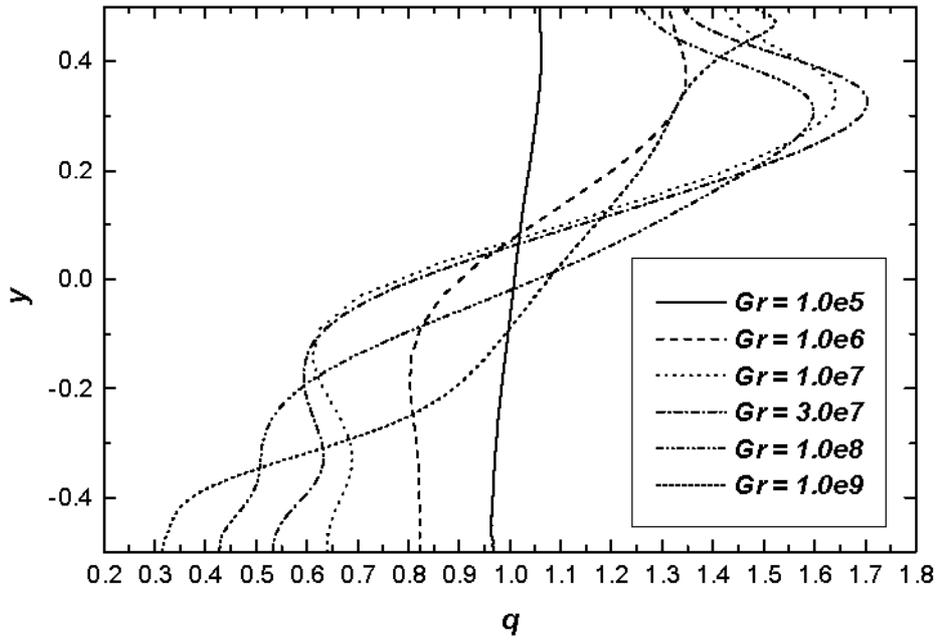
b)

Figura 4.20

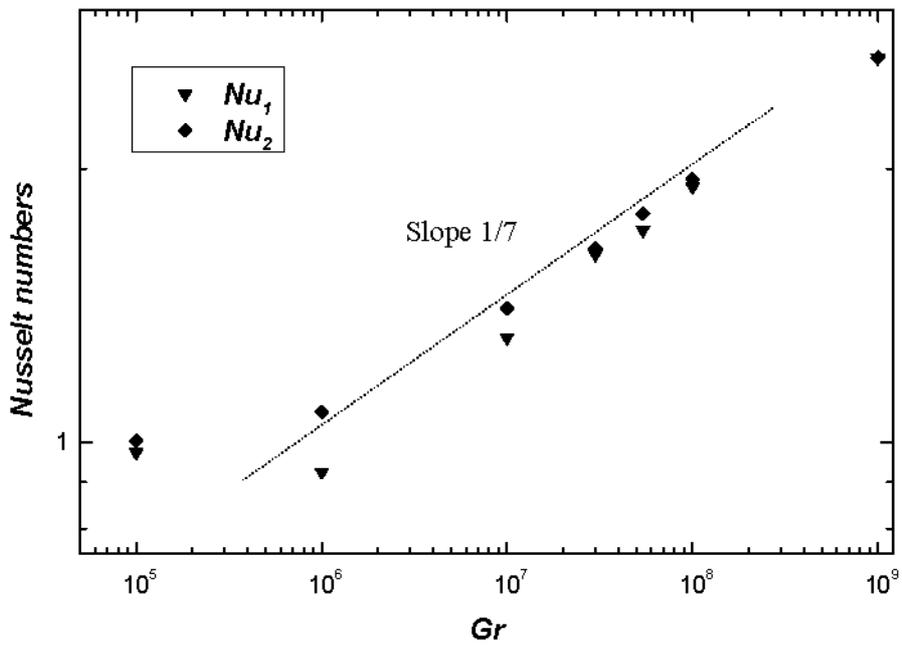
Coefficiente di attrito C_f mediato nel tempo per $AR=1$:

a) profili lungo la parete verticale per tutti i casi studiati. Sono mostrati i valori mediati tra la parete destra e quella sinistra.

b) Dipendenza del valore mediato lungo y , $\langle \bar{C}_f \rangle_y$, dal numero di Grashof.



a)

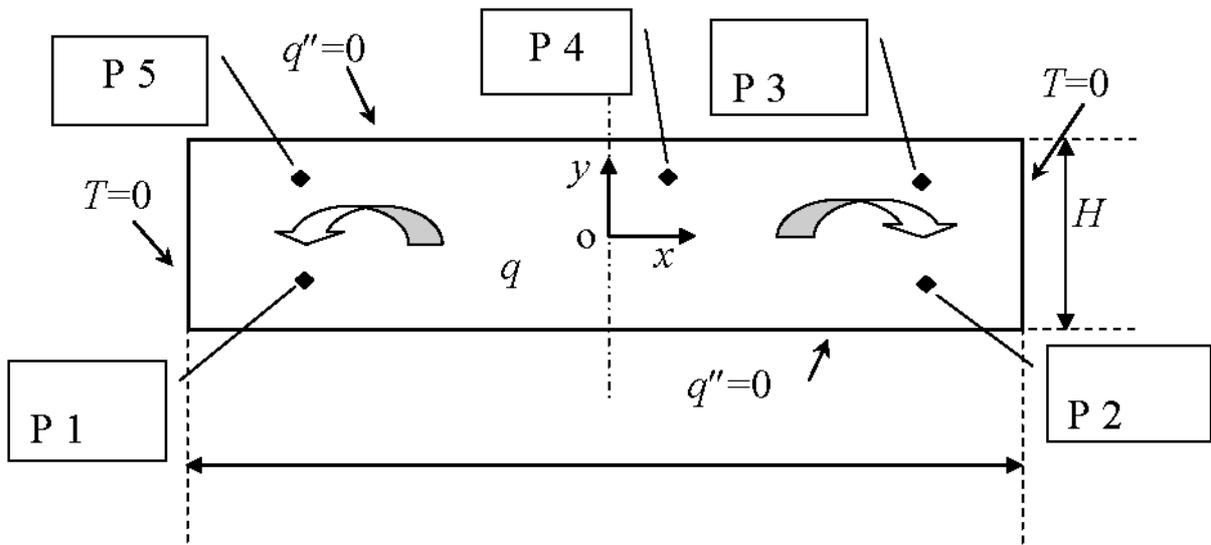


b)

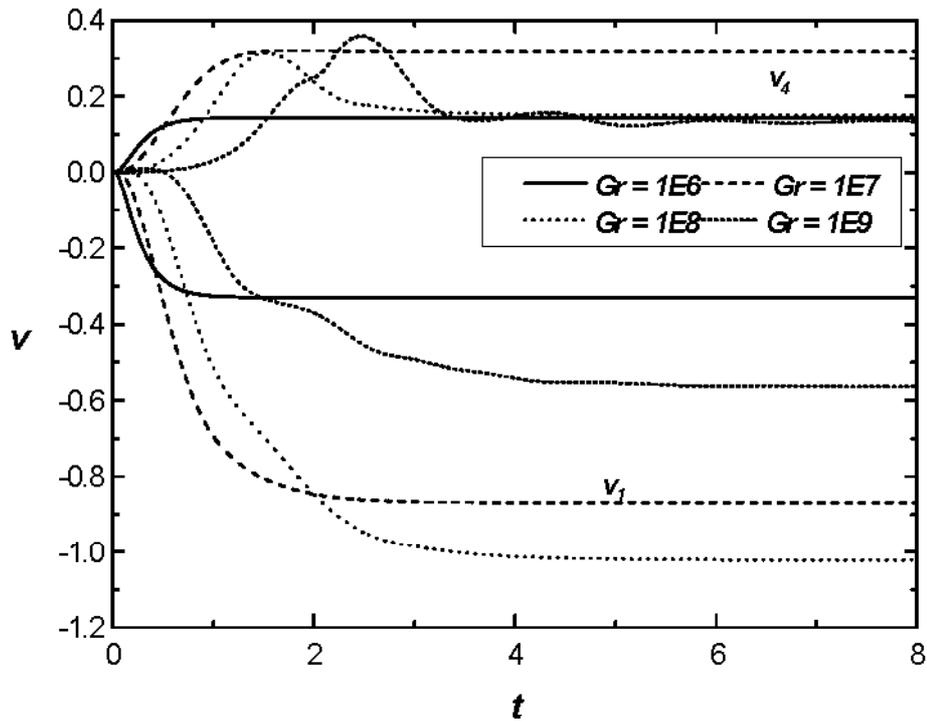
Figura 4.21

Scambio di calore per $AR=1$:

- a) Profili mediati nel tempo del flusso termico alla parete q'' , normalizzato rispetto al suo valore medio, lungo le pareti verticali, per tutti i casi studiati. Sono mostrati i valori mediati tra la parete destra e sinistra.
- b) Dipendenza dei numeri di Nusselt Nu_1 e Nu_2 dal numero di Grashof.



a)

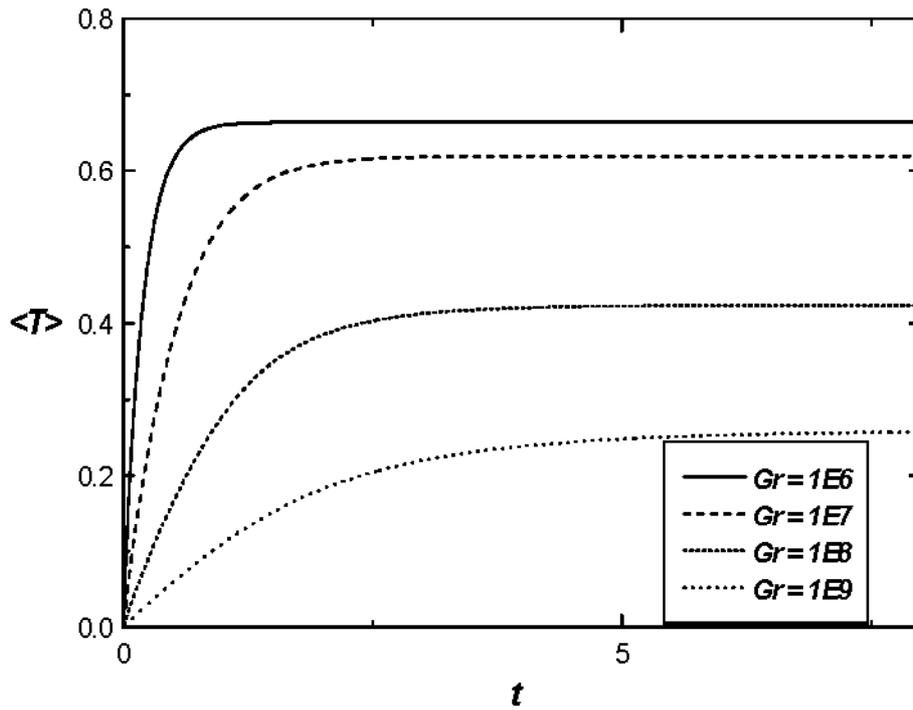


b)

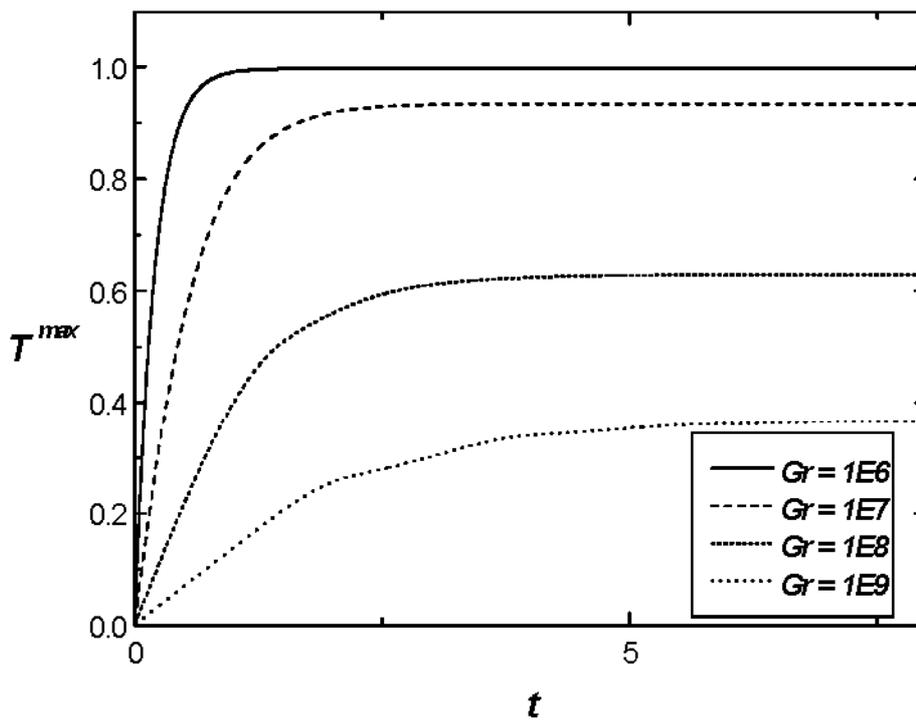
Figura 5.1

a) Schema della geometria e notazione usata per la cavità con $AR=0.25$

b) Andamento della velocità verticale v nei due punti di monitoraggio P1 e P4 per i quattro casi laminari stazionari studiati.



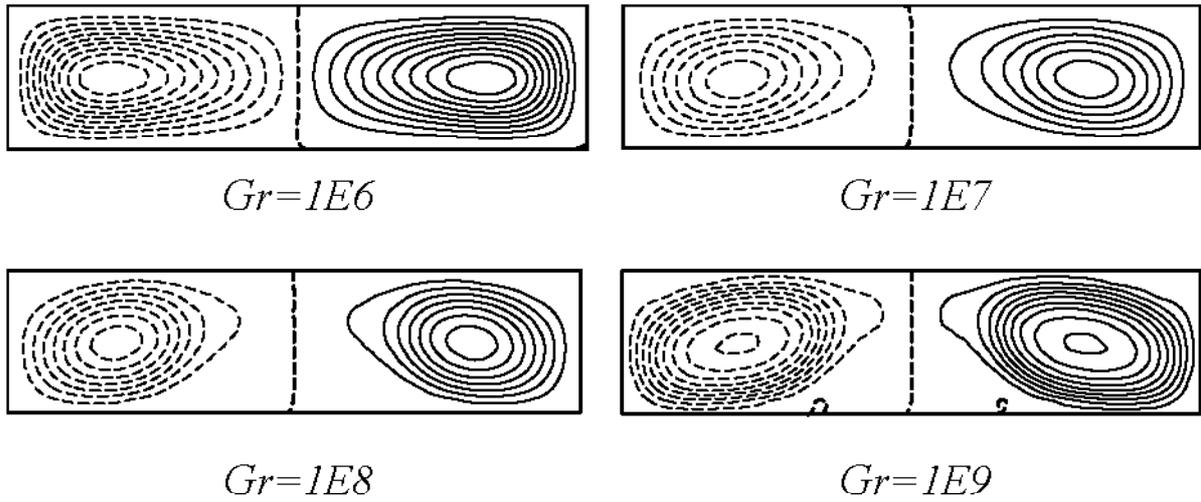
a)



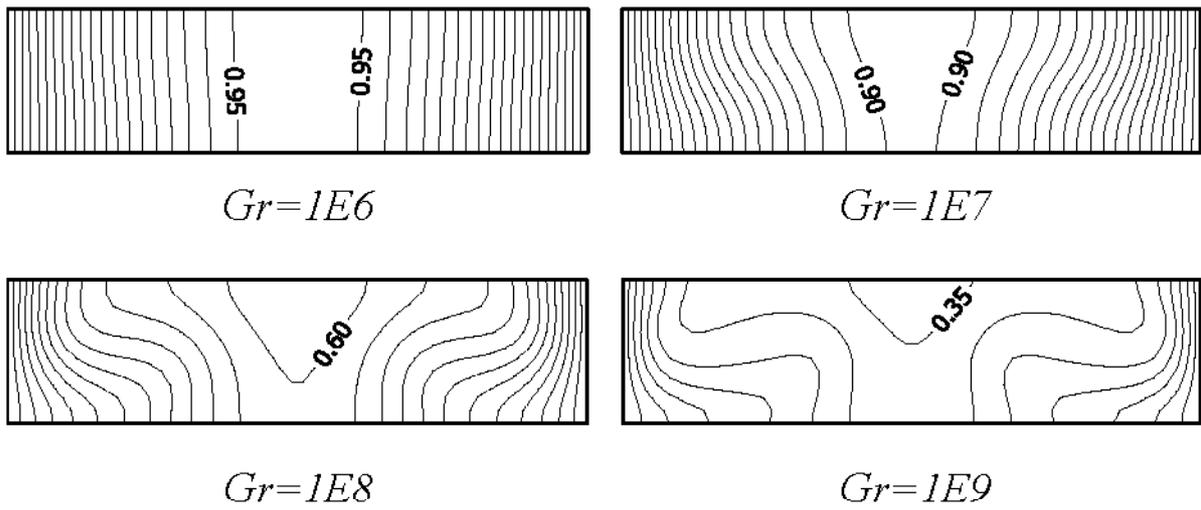
b)

Figura 5.2

Andamento della temperatura media (a) e massima (b) nei quattro casi stazionari studiati per $AR=0.25$.



a)

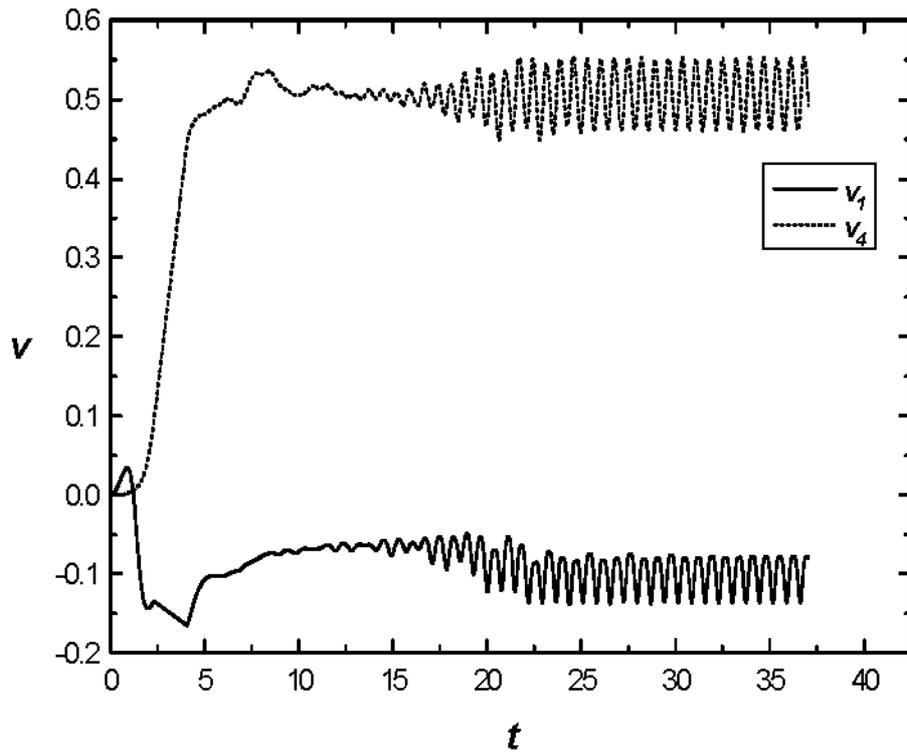


b)

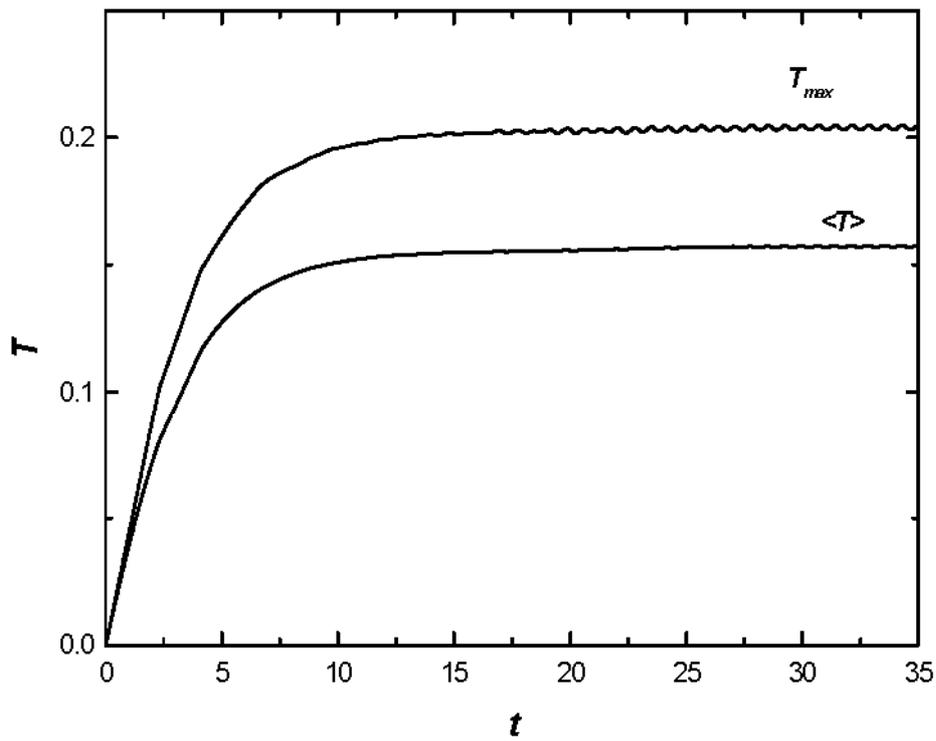
Figura 5.3

Campi di moto e di temperatura per i quattro casi stazionari ad $AR=0.25$.

- a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.005. Linea continua: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria.
- b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.05.



a)



b)

Figura 5.4

Andamento della velocità verticale v (a) nei punti di monitoraggio P_1 e P_4 e della temperatura massima e media (b) per $AR=0.25$, $Gr=10^{10}$ (moto periodico).

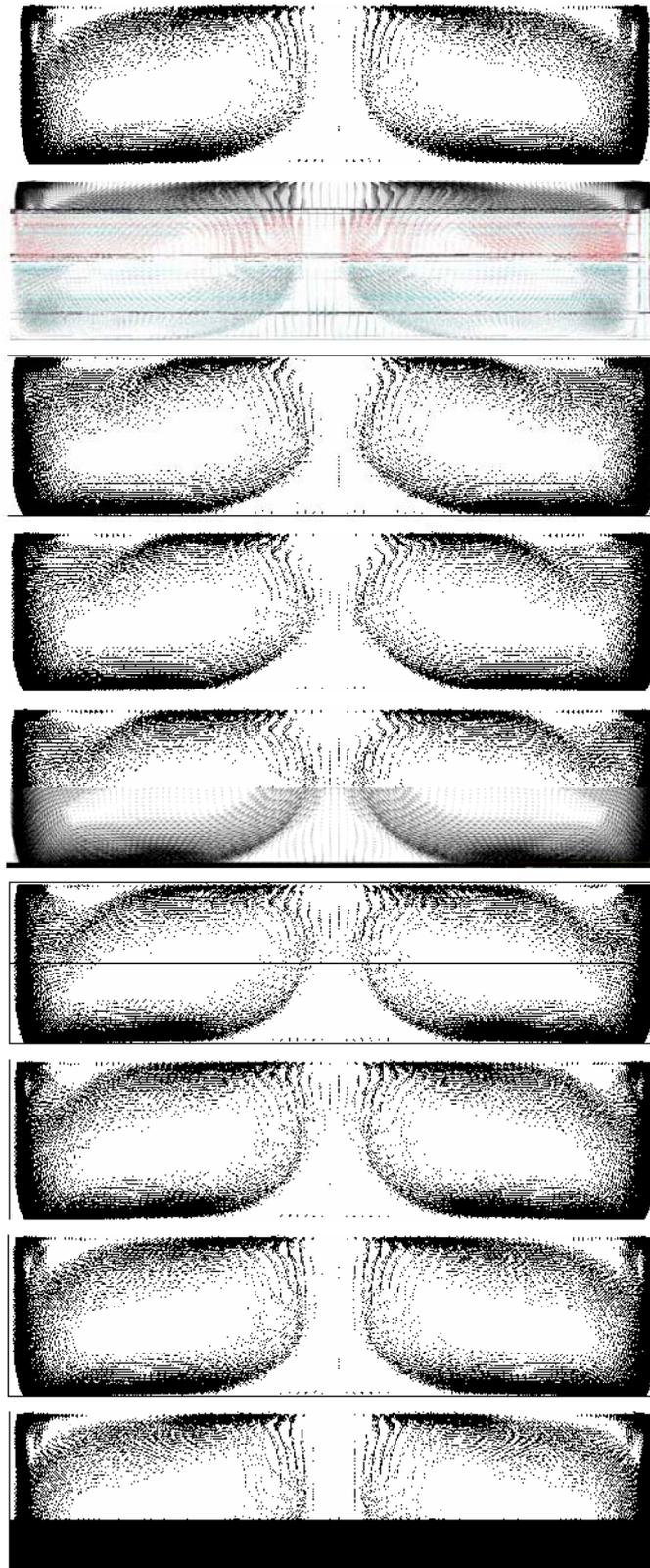


Figura 5.5

Sequenza temporale nella forma di diagrammi vettoriali per il caso $AR=0.25$, $Gr=10^{10}$ (moto periodico). L'intervallo adimensionale fra le istantanee è ~ 0.1 , così che la sequenza copre approssimativamente un periodo.

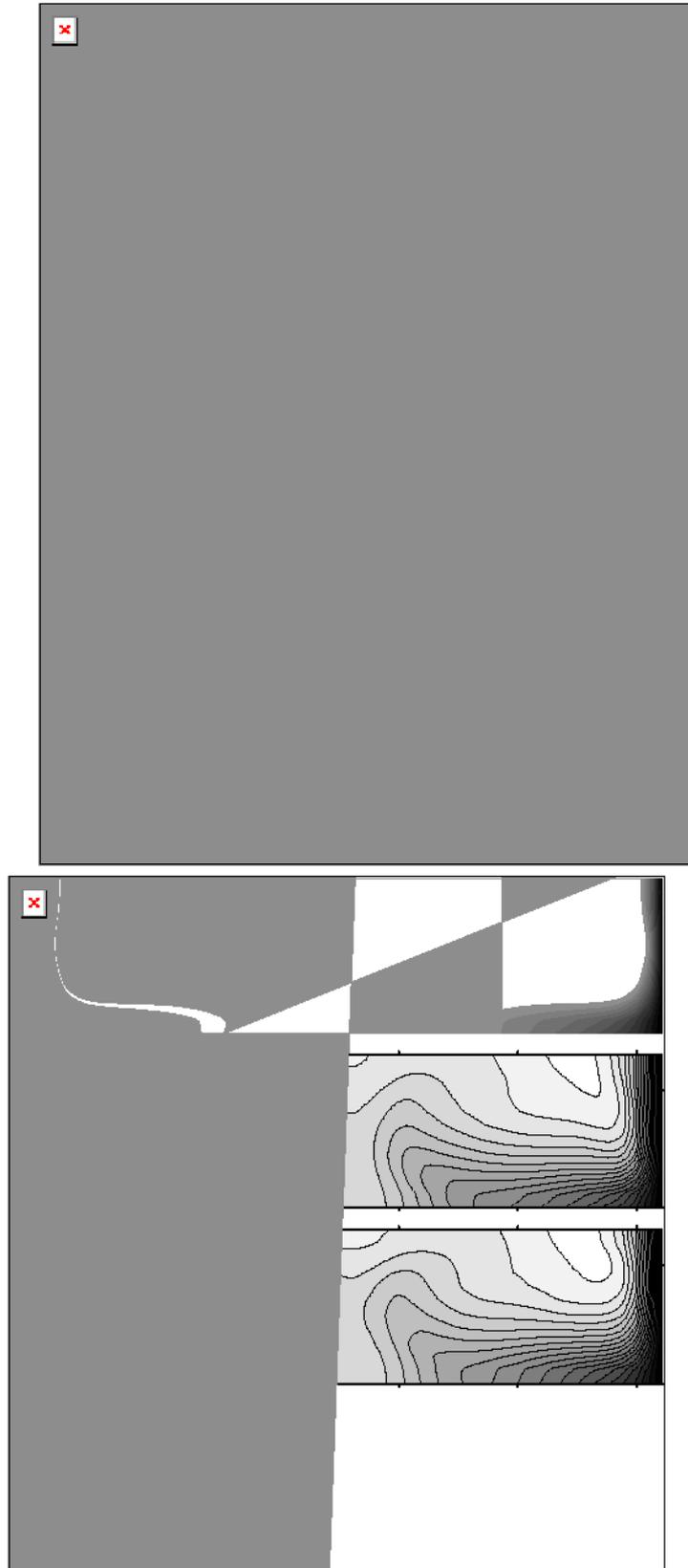


Figura 5.6

Sequenza temporale della distribuzione di temperatura per il caso $AR=0.25$, $Gr=10^{10}$ (moto periodico). L'intervallo adimensionale fra le istantanee è ~ 0.1 , così che la sequenza copre approssimativamente un periodo. L'intervallo adimensionale fra le isoterme è 0.01 .

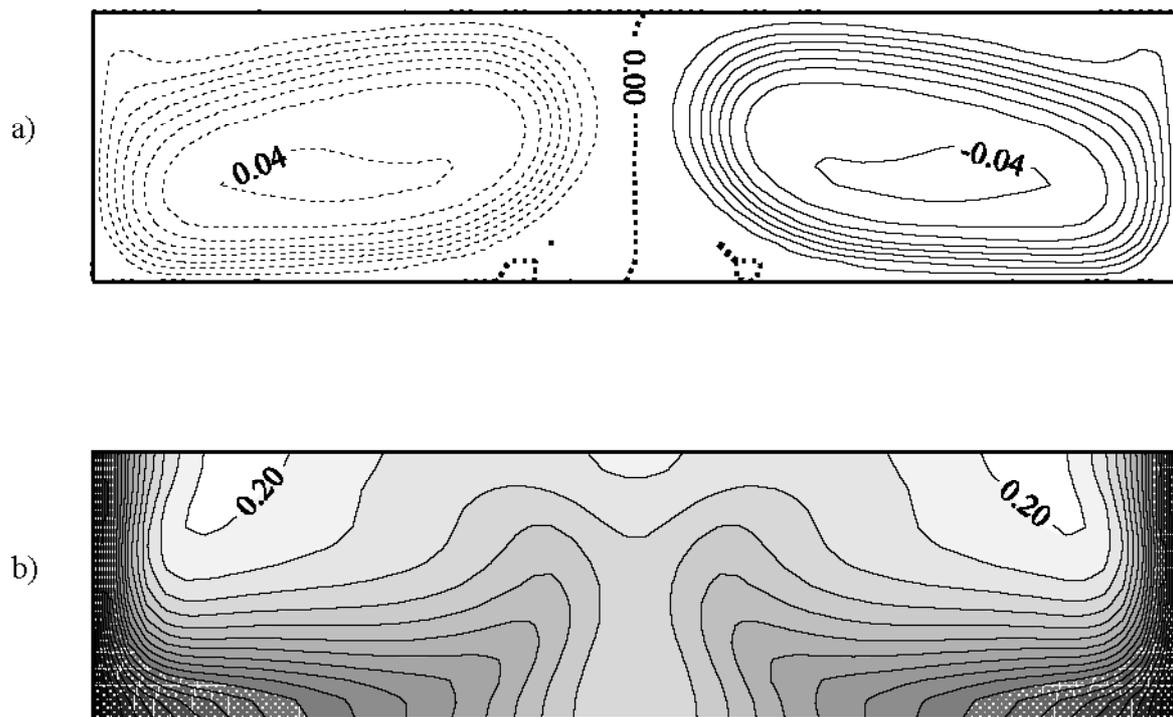
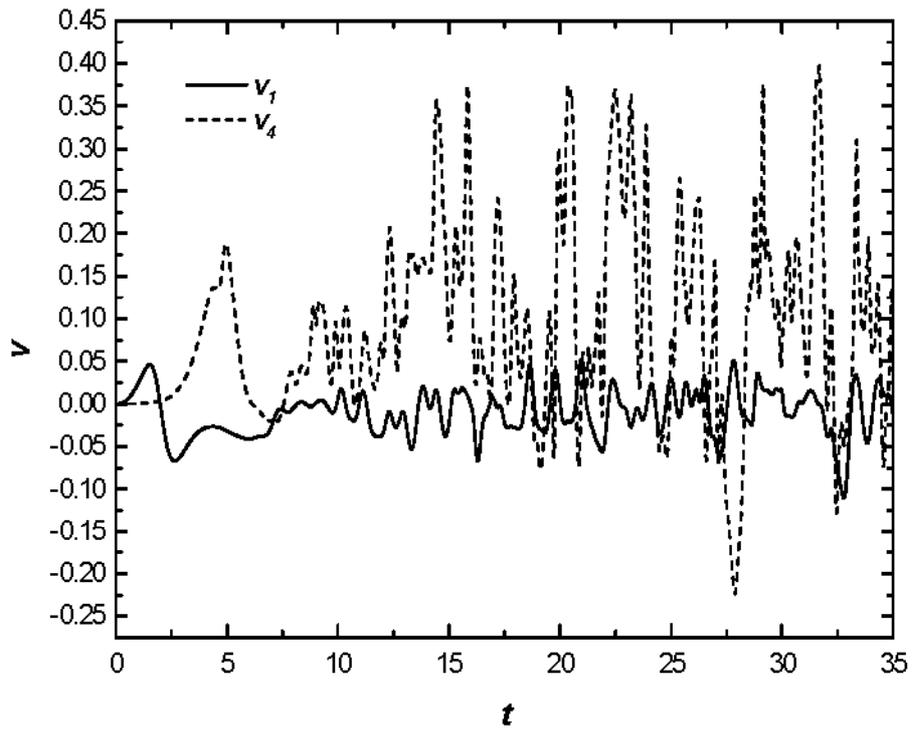


Figura 5.7

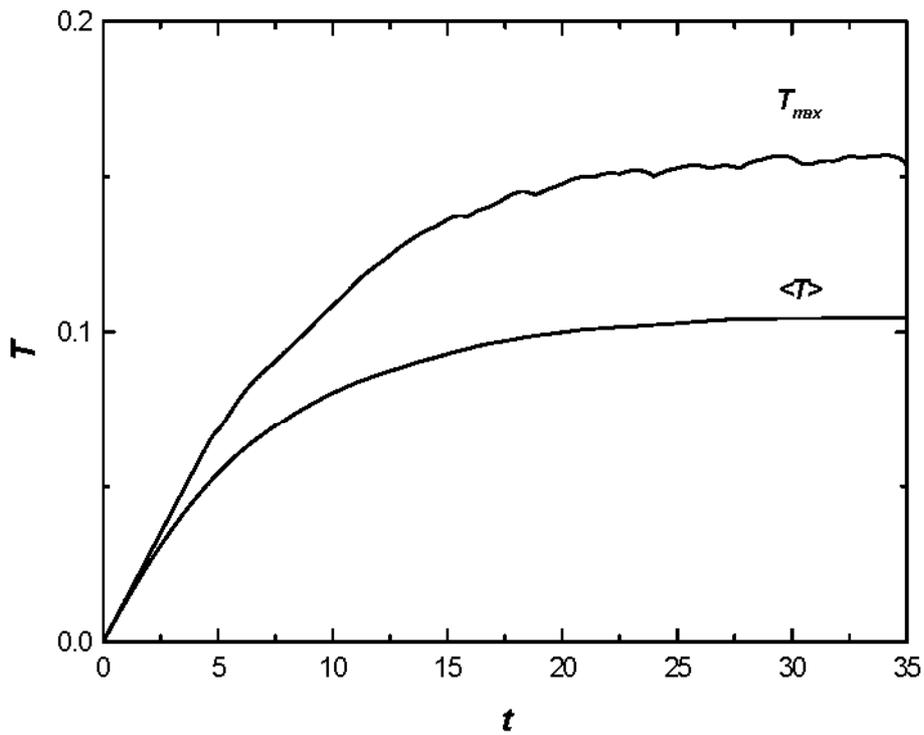
Campi di moto e di temperatura medi per il caso $AR=0.25$ e $Gr=10^{10}$ (moto periodico).

a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.005. Linea continua: circolazione oraria. Linea tratteggiata: circolazione antioraria.

b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.01.



a)



b)

Figura 5.8

Andamento della velocità verticale v (a) nei punti monitoraggio P_1 , P_4 e della temperatura massima e media (b) per $AR=0.25$ $Gr=10^{11}$ (moto caotico).

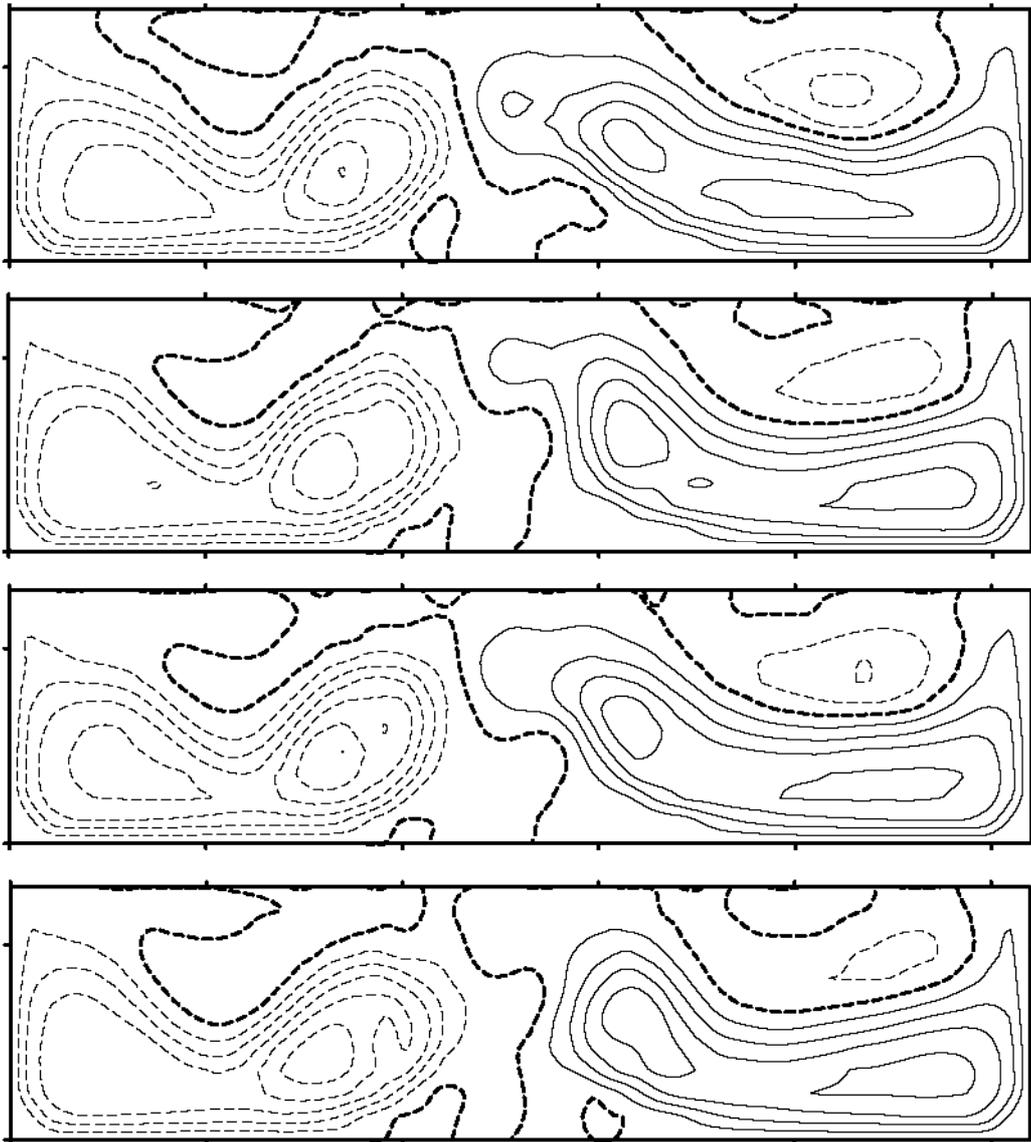


Figura 5.9

Sequenza temporale della funzione di corrente per il caso $AR=0.25$ $Gr=10^{11}$ (moto caotico).
 Linea continua: circolazione oraria; linea tratteggiata: circolazione antioraria. L'intervallo tra
 le linee di corrente è 0.005, l'intervallo di tempo adimensionale tra le istantanee 0.2.

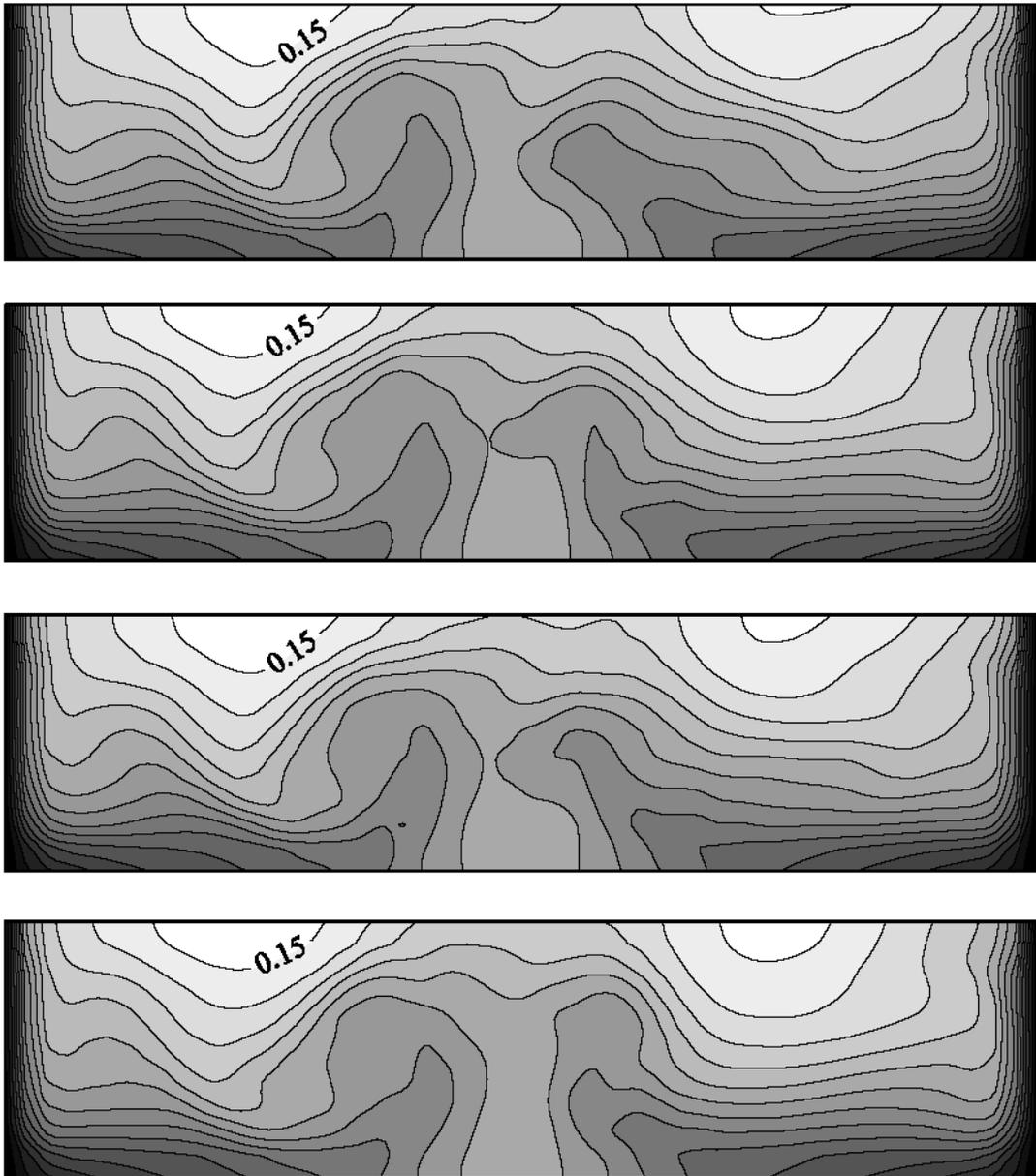


Figura 5.10

Sequenza temporale delle isoterme per il caso $AR=0.25$ $Gr=10^{11}$ (moto caotico). L'intervallo tra le isoterme è 0.01, mentre quello tra le istantanee è 0.2.

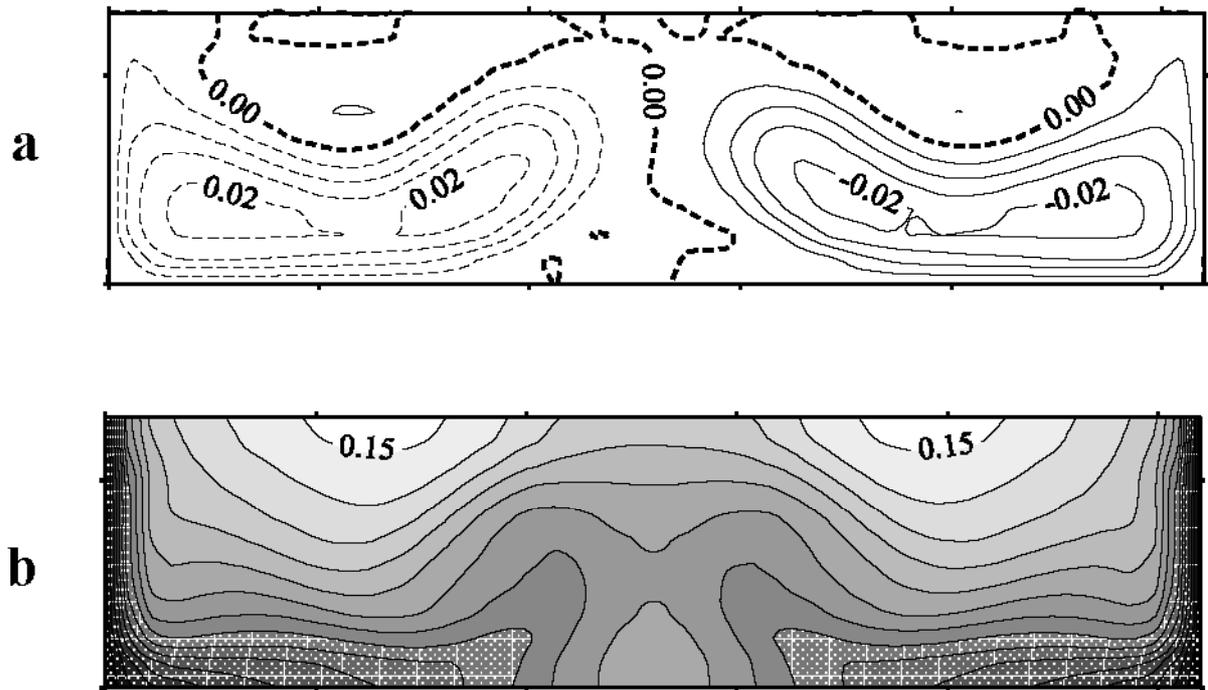
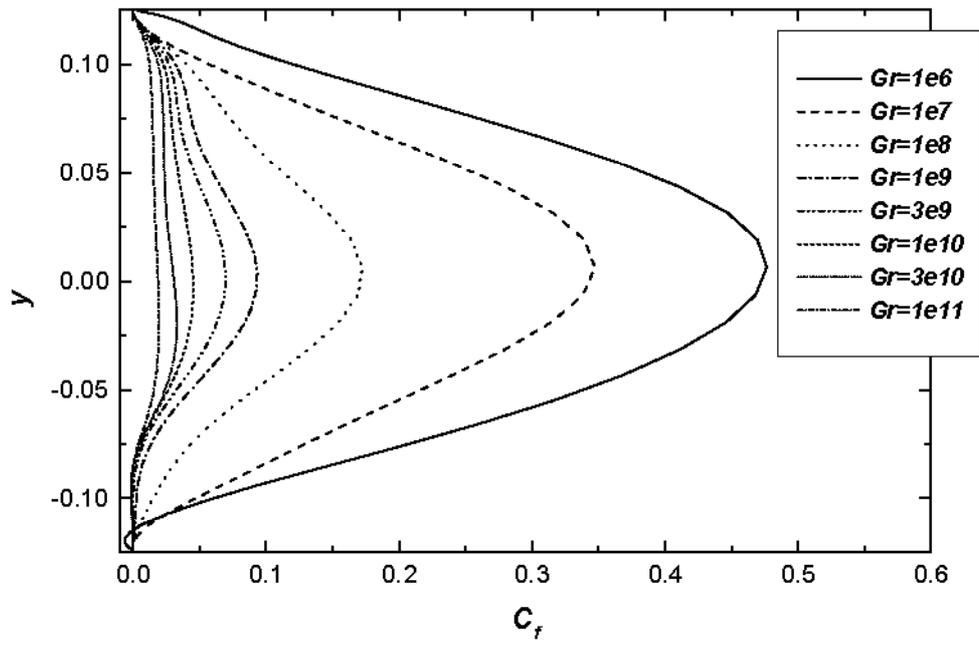


Figura 5.11

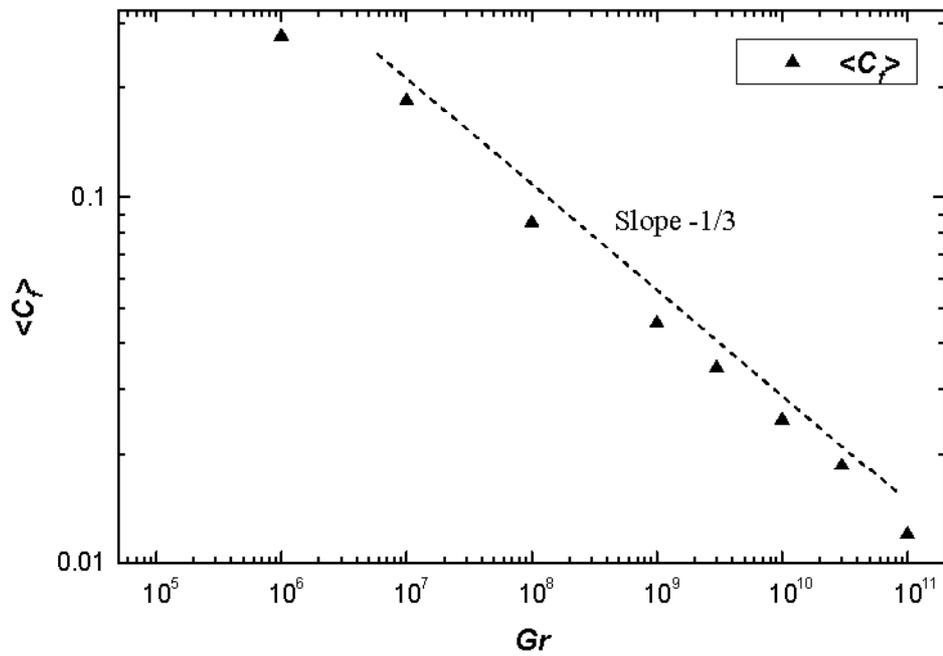
Campi di moto e di temperatura medi per il caso $AR=0.25$ e $Gr=10^{11}$ (moto caotico).

a) Funzione di corrente, intervallo adimensionale 0.005. Linea continua: circolazione oraria. Linea tratteggiata: circolazione antioraria.

b) Isotherme, intervallo adimensionale 0.01.



a)



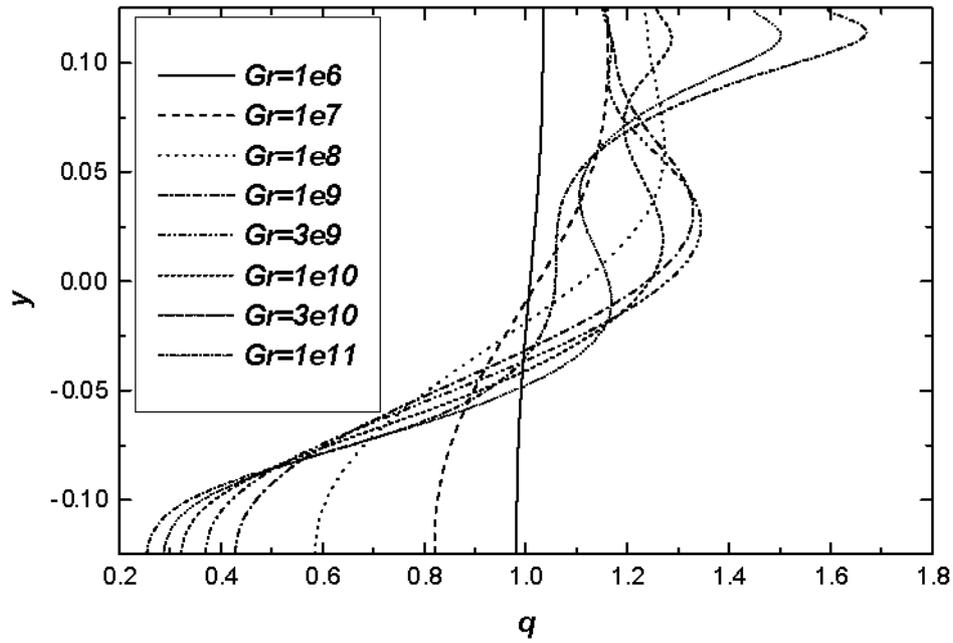
b)

Figura 5.12

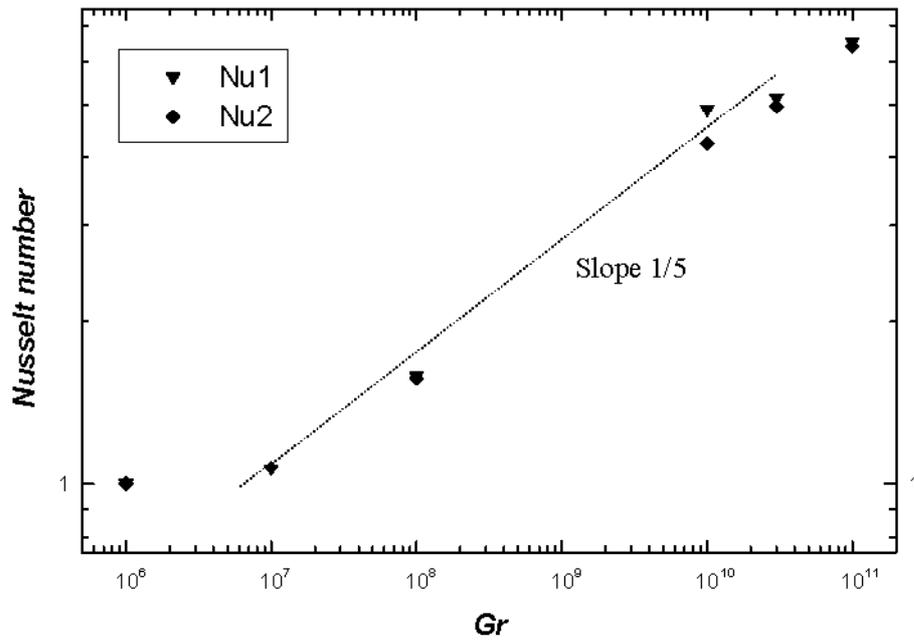
Coefficiente di attrito C_f mediato nel tempo per $AR=0.25$:

a) Profili lungo la parete verticale per tutti i casi studiati.

b) Dipendenza del valore mediato lungo y , $\langle C_f \rangle_y$, dal numero di Grashof.



a)



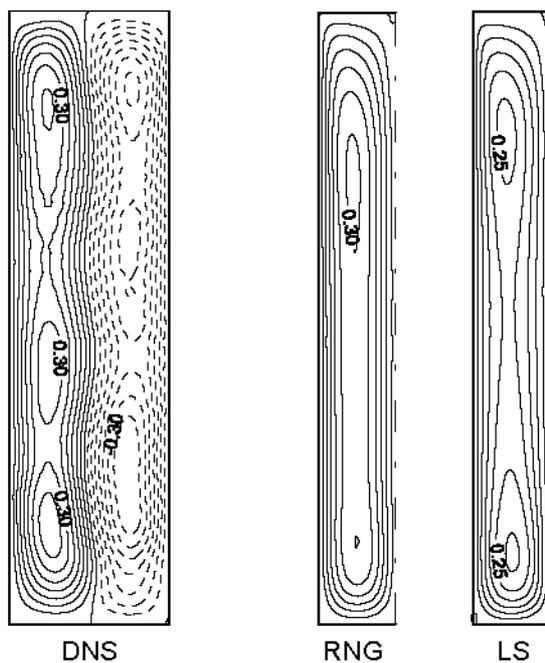
b)

Figura 5.13

Scambio di calore per $AR=0.25$:

- a) Profili mediati nel tempo del flusso termico di parete per tutti i casi studiati.
- b) Dipendenza dei numeri di Nusselt Nu_1 e Nu_2 dal numero di Grashof

a)



b)

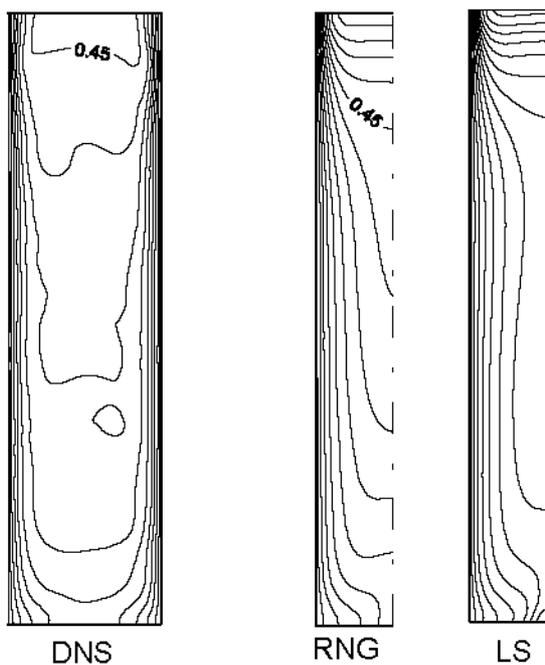


Figura 6.1

Confronto tra campi di moto (a) e di temperatura (b) ottenuti dalla di simulazione diretta e dai due modelli di turbolenza RNG e LS per il caso $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^8$.

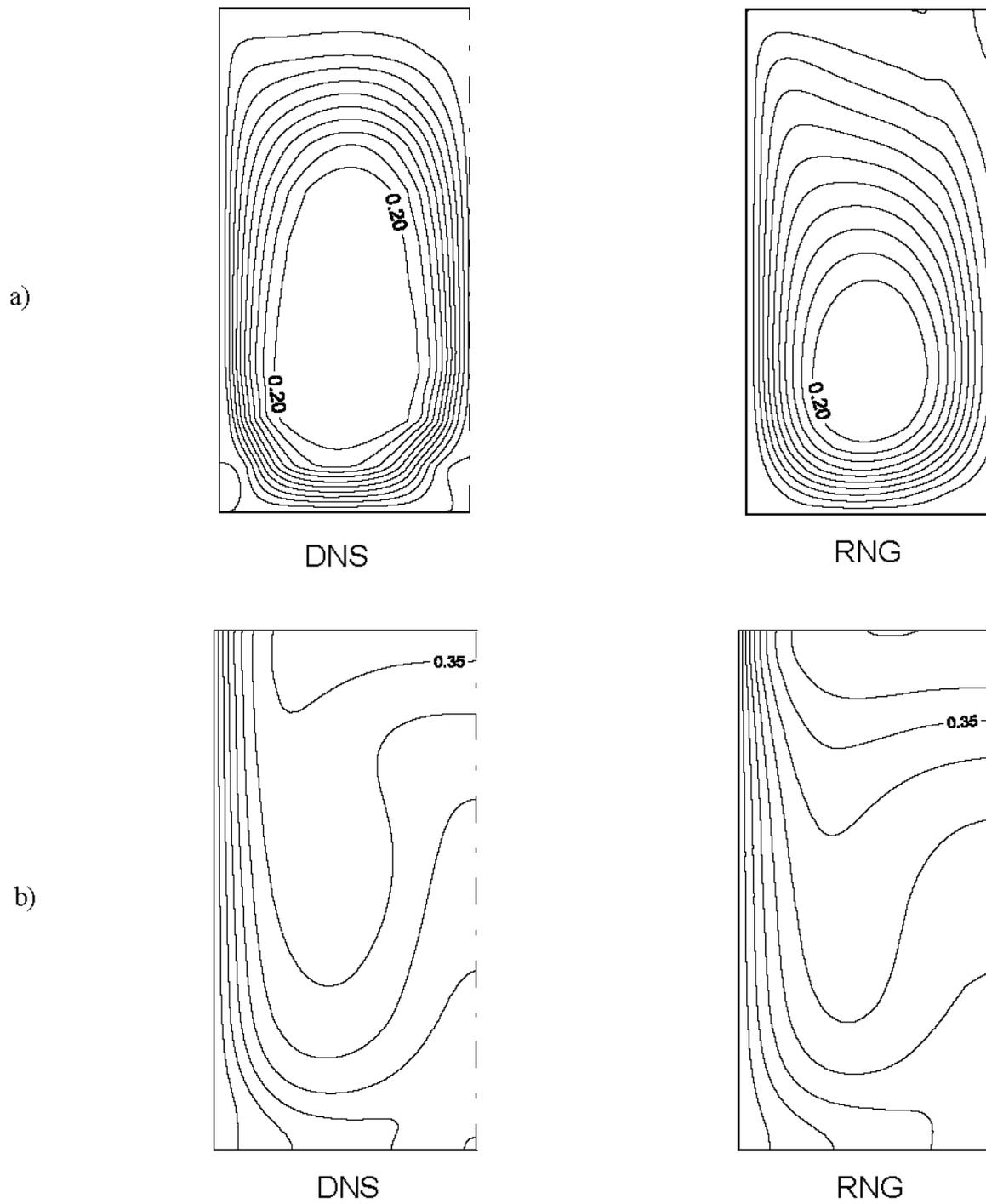


Figura 6.2

Confronto tra campi di moto (a) e di temperatura (b) ottenuti dalla simulazione diretta e dal modello di turbolenza RNG per $AR=1$ e $Gr=10^9$.

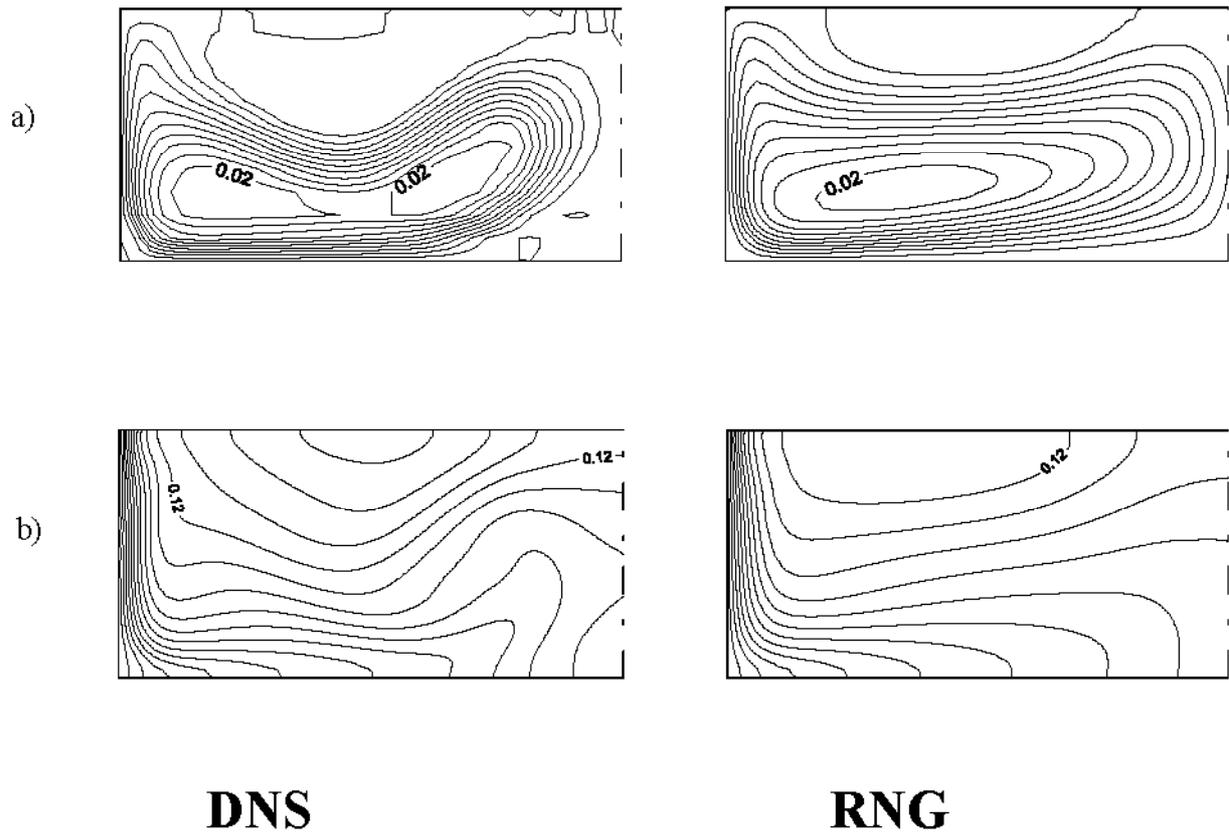


Figura 6.3

Confronto tra campi di moto (a) e di temperatura (b) ottenuti dalla simulazione diretta e dal modello di turbolenza RNG k- ϵ per $AR=0.25$ e $Gr=10^{11}$.

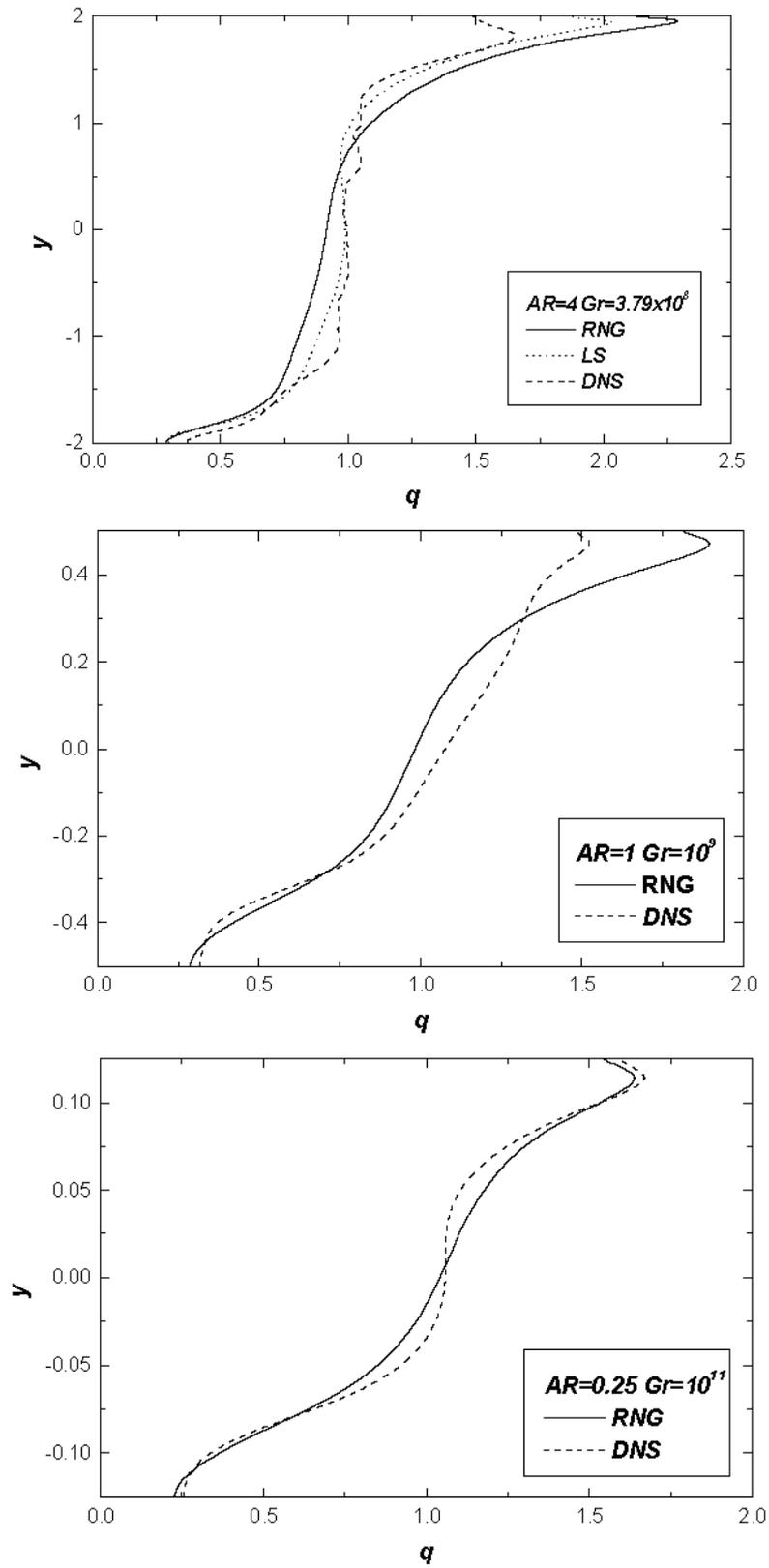


Figura 6.4

Confronto tra i flussi termici di parete ottenuti dalla simulazione diretta e dai modelli di turbolenza.

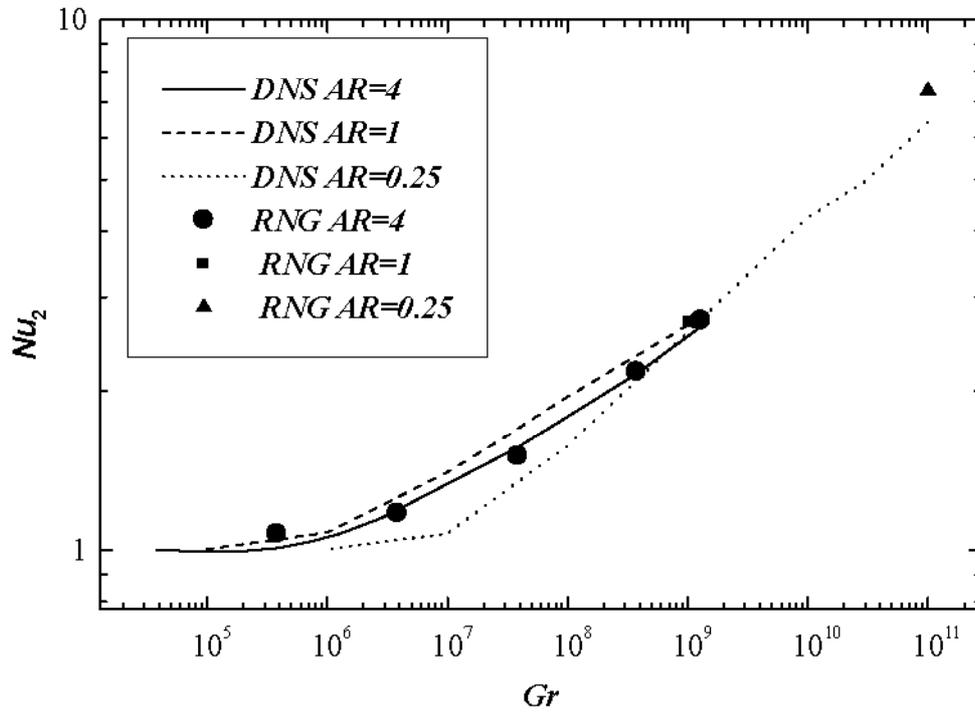


Figura 6.5

Andamenti del numero di Nusselt Nu_2 per tutti i casi studiati, calcolato mediante la simulazione diretta e il modello di turbolenza RNG $k-\epsilon$.

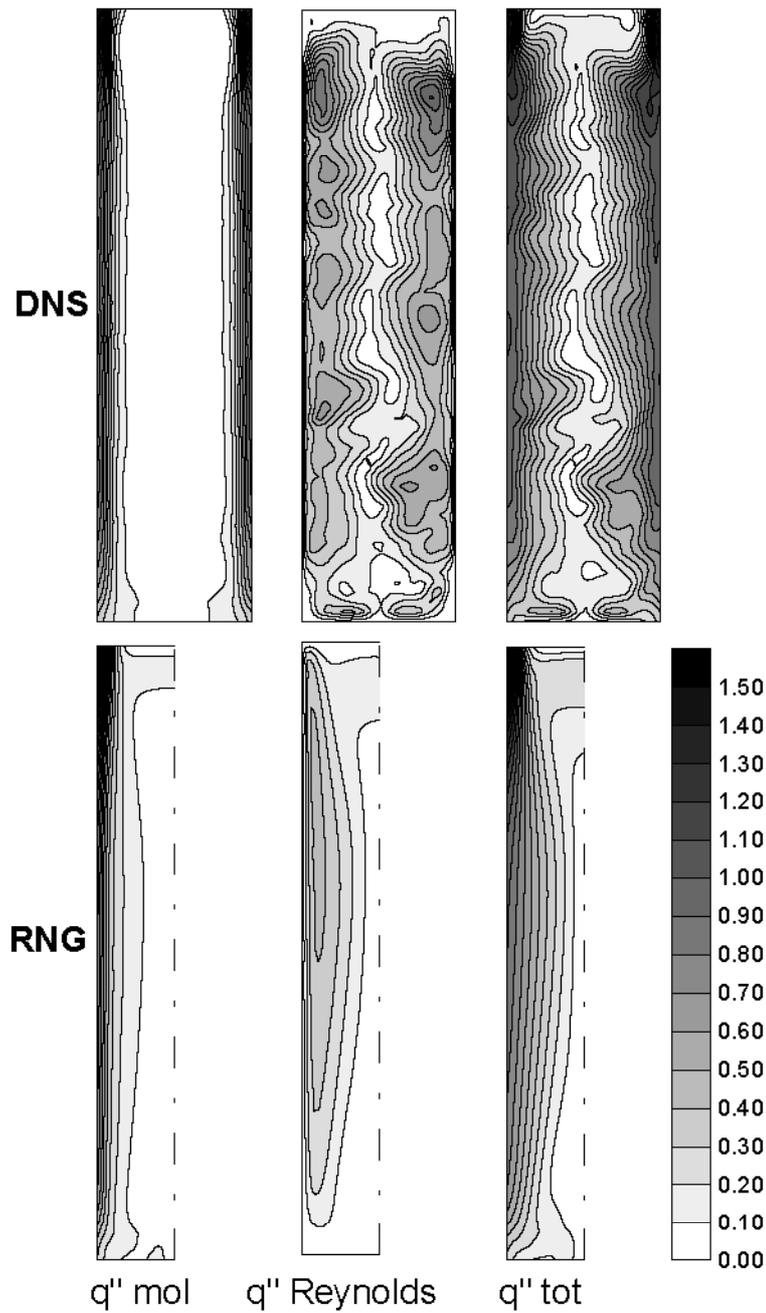


Figura 6.6

Confronto tra il modulo del vettore flusso termico molecolare (a sinistra), di Reynolds (centro) e totale (a destra) ricavati dalla simulazione diretta (in alto) e dal modello di turbolenza RNG $k-\epsilon$ (in basso) per $AR=4$ e $Gr=3.79 \cdot 10^8$.

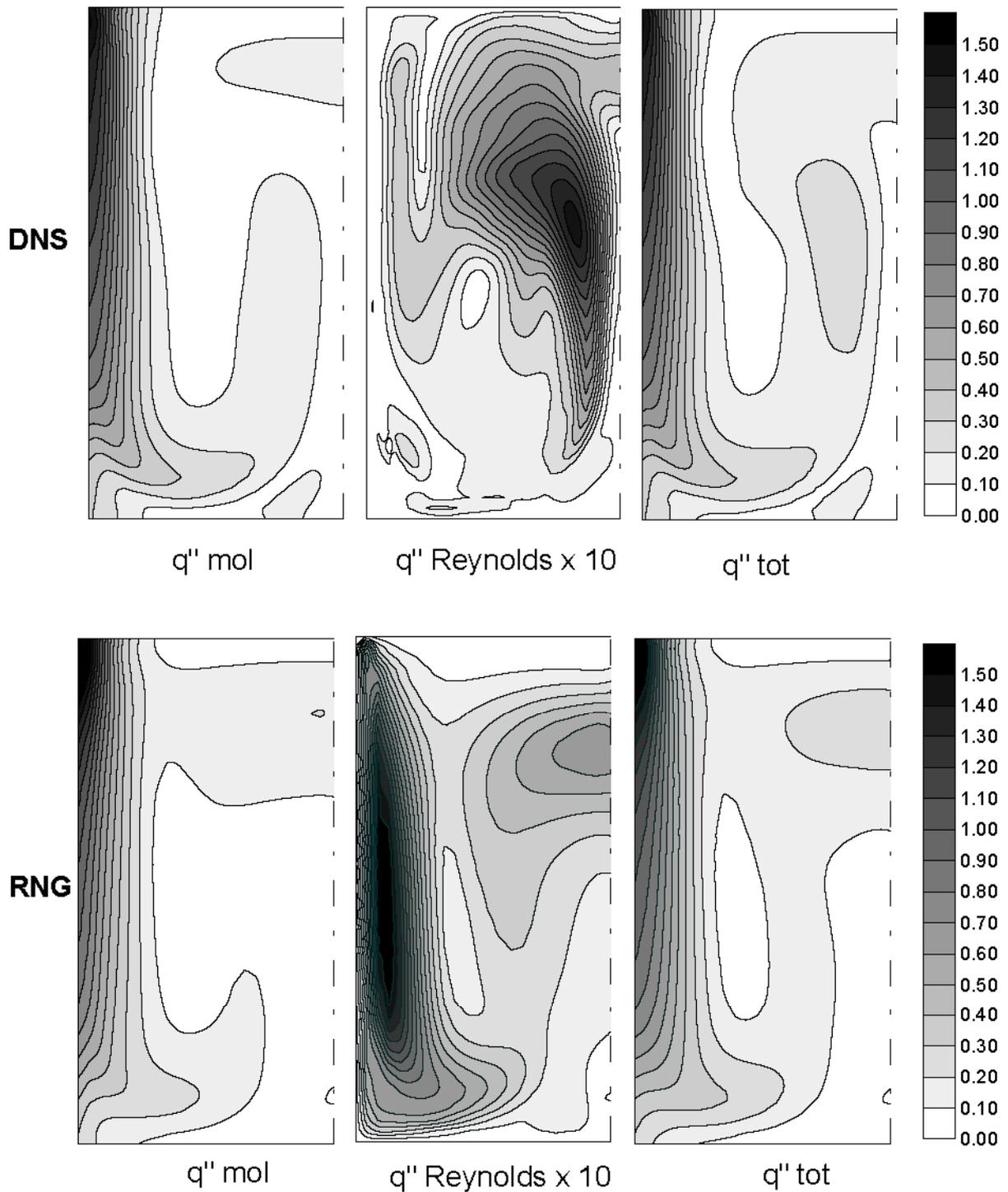


Figura 6.7

Confronto tra il modulo del vettore del flusso termico molecolare (a sinistra), di Reynolds (centro) e totale (a destra) ricavati dalla simulazione diretta (in alto) e dal modello di turbolenza RNG k - ϵ (in basso) per $AR=1$ e $Gr=10^9$. La scala dei flussi turbolenti è amplificata di un fattore 10.

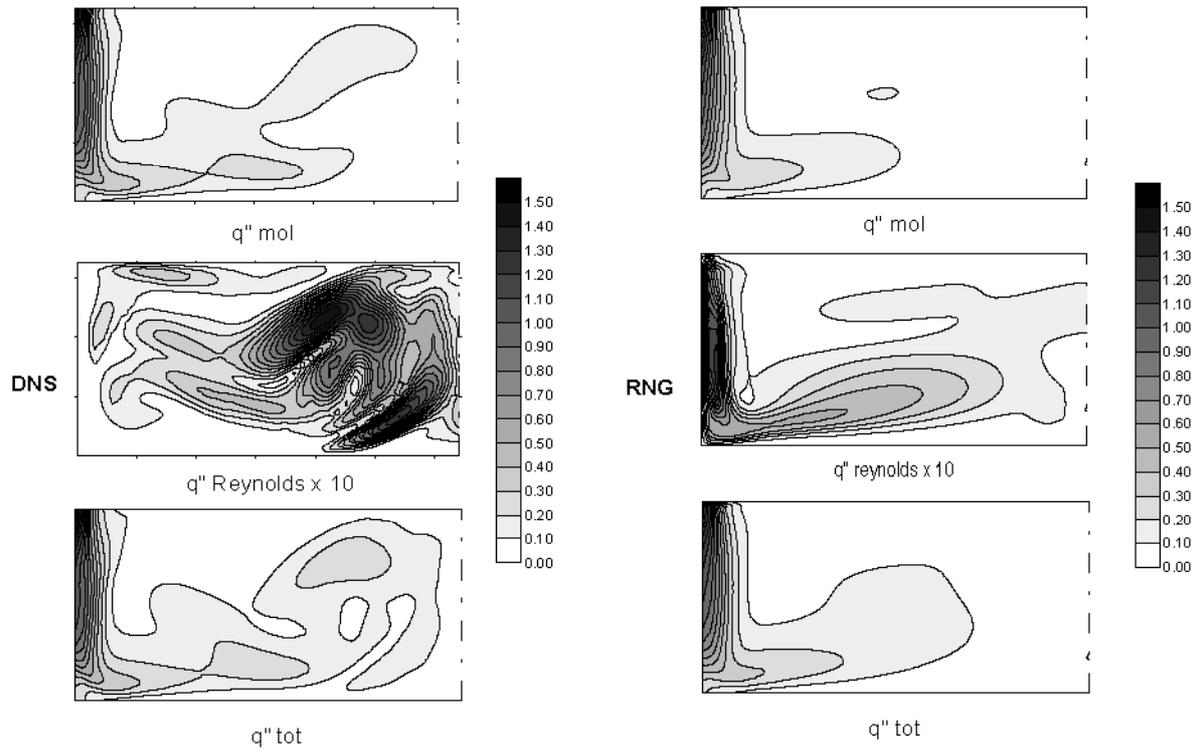
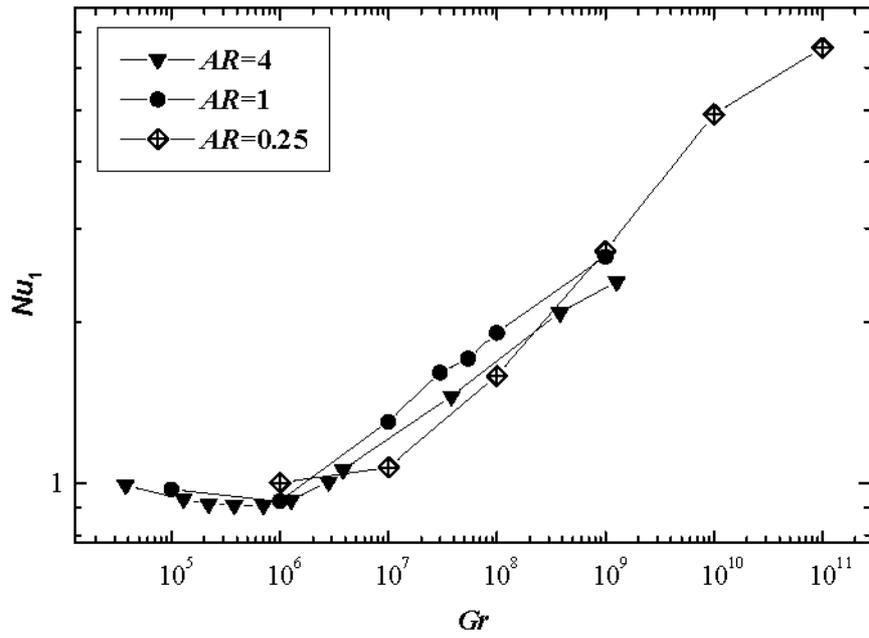
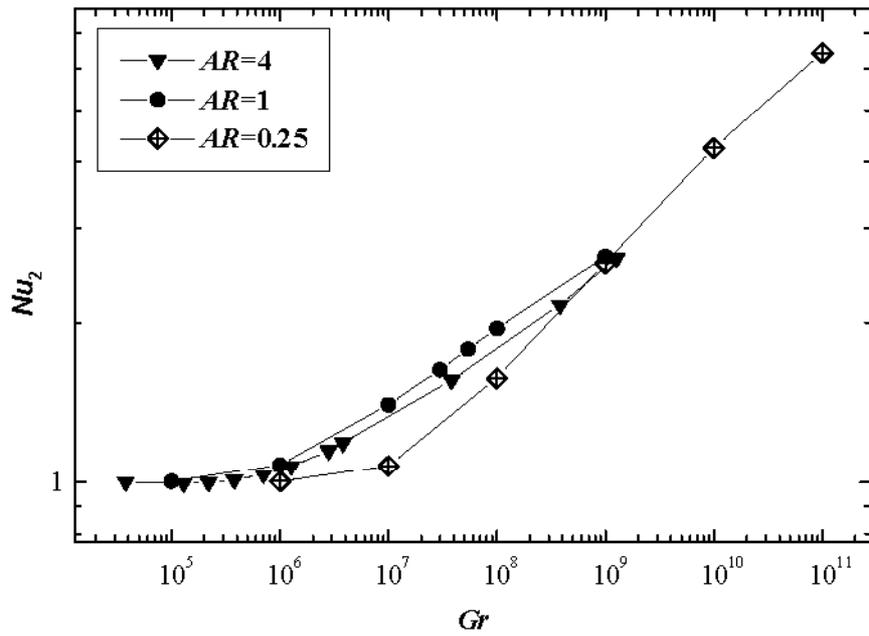


Figura 6.8

Confronto tra il modulo del vettore del flusso termico molecolare (in alto), di Reynolds (al centro) e totale (in basso) ricavati dalla simulazione diretta (a sinistra) e dal modello di turbolenza RNG $k-\epsilon$ (a destra) per $AR=0.25$ e $Gr=10^{11}$. La scala dei flussi turbolenti è amplificata di un fattore 10.



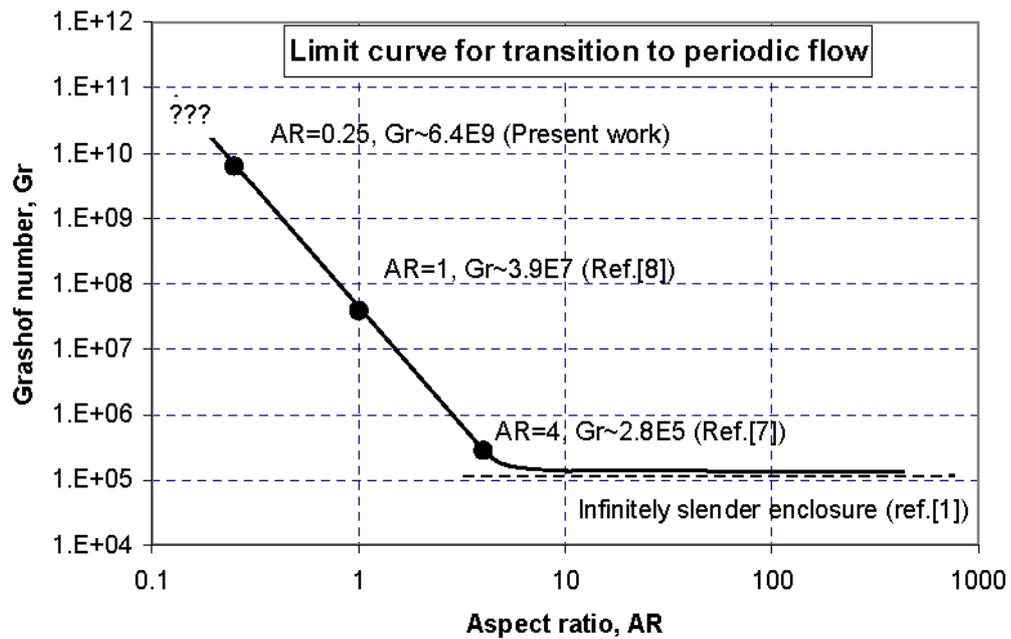
(a)



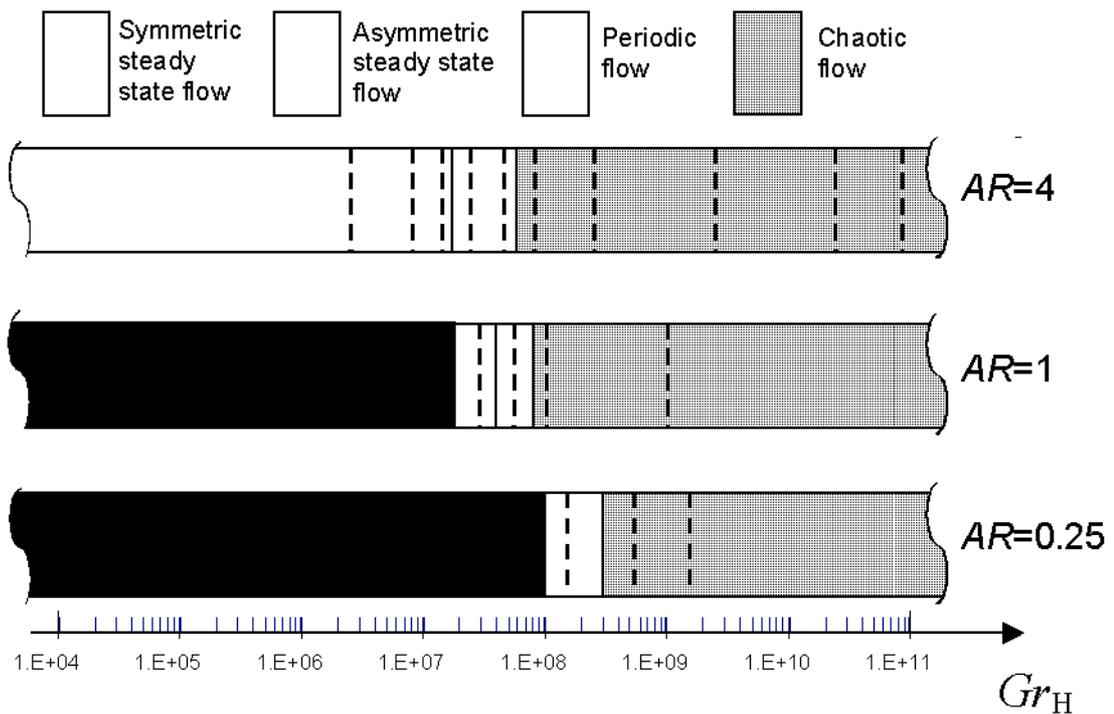
(b)

Figura 7.1

Scambio di calore: numeri di Nusselt basati su T_{\max} (Nu_1 , grafico a) e $\langle T \rangle$ (Nu_2 , grafico b) per i tre fattori di forma studiati ($AR = 4, 1, 0.25$)



a)



b)

Figura 7.2

- a) Curva limite per la transizione da stato stazionario a moto periodico nel piano $AR-Gr$.
 b) Grafico riassuntivo dei regimi di moto per i tre valori del fattore di forma. L'ascissa è $Gr_H = Gr \times AR^3$, cioè il numero di Grashof basato sulla massima temperatura conduttiva e sulla altezza della cavità.

Rapporto preparato nel mese di Novembre 2008